

1921.

No. 17.

GENERAL LIBRARY
JAN - 1 1922
UNIV. OF TORONTO

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GRÜN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 66. Heft 1.

DER GANZEN REIHE 371. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1921 erscheinen Bd. 64, 65 und 66 à 8 Hefte. Preis von Bd. 65 M. 60.—.

Nach dem Ausland mit Valuta-Aufschlag.

Ausgegeben am 27. Oktober 1921.

Inhalt.

	Seite
1. Eberhard Buchwald. Die Austrittswahrscheinlichkeit kolloidaler Teilchen und verwandte Begriffe.	1
2. F. Harms. Gekoppelte Schwingungssysteme mit Selbsterregung	25
3. Erich Rumpf. Über die Ionisation in der Geißlerentladung .	50
4. Satyendra Ray. Über zwei Schwierigkeiten bei der Erklärung der Photophoresis als Radiometerwirkung	71
5. G. Borelius. Einfluß von Inhomogenität auf die Messung der thermoelektrischen Effekte	73

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Inhalt.

Vierte Folge. Band 66.

Siebzehntes Heft.

Seite

1. Eberhard Buchwald. Die Austrittswahrscheinlichkeit kolloidaler Teilchen und verwandte Begriffe. 1
2. F. Harms. Gekoppelte Schwingungssysteme mit Selbsterregung 25
3. Erich Rumpf. Über die Ionisation in der Geißlerentladung . 50
4. Satyendra Ray. Über zwei Schwierigkeiten bei der Erklärung der Photophorese als Radiometerwirkung 71
5. G. Borelius. Einfluß von Inhomogenität auf die Messung der thermoelektrischen Effekte 73

Ausgegeben am 27. Oktober 1921.

Achtzehntes Heft.

1. Albert Wigand. Die elektrische Leitfähigkeit in der freien Atmosphäre, nach Messungen bei Hochfahrten im Freiballon . 81
2. B. Wwedensky. Über die magnetische Viskosität in sehr dünnen Eisendrähten und ihre Abhängigkeit von der Magnetisierung und der Temperatur 110
3. W. Arkadiew. Erklärungen zu der Arbeit von R. Gans „Die Permeabilität des Nickels für kurze Hertzsche Wellen und die Messungen von Arkadiew“ 130
4. Benno Kurze. Einiges zur Theorie der Elektrizitätsleitung in Flammgasen. (Gekürzte Leipziger Dissertation.) 133
5. Richard Gans. Magnetisierung durch Rotation. Bemerkung zur Antikritik von Karl F. Herzfeld. 155

Ausgegeben am 22. November 1921.

406029

Neunzehntes Heft.

	Seite
1. A. Byk. Das Theorem der übereinstimmenden Zustände und die Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten	157
2. R. Minkowski. Untersuchungen über die magnetische Drehung der Polarisationssebene in nichtleuchtendem Na-Dampf. (Hierzu Taf. I.)	206
3. Stjepan Mohorovičić. Die Rotverschiebung der Spektrallinien vom Standpunkt der Newtonschen Physik	227

Ausgegeben am 6. Dezember 1921.

Zwanzigstes Heft.

1. W. Wien. Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und die Dämpfung der Spektrallinien. II	229
2. Gustav Mie. Über die Abklingung der Lichtemission eines Atoms	237
3. E. Everling und A. Wigand. Spannungsgefälle und vertikaler Leitungsstrom in der freien Atmosphäre, nach Messungen bei Hochfahrten im Freiballon	261
4. M. v. Laue. Erwiderung auf Hrn. Lenards Vorbemerkungen zur Soldnerschen Arbeit von 1801	283
5. R. Götze. Liniengruppen und innere Quanten	285

Ausgegeben am 20. Dezember 1921.

Einundzwanzigstes Heft.

1. E. v. Angerer und R. Ladenburg. Experimentelle Beiträge zur Ausbreitung des Schalles in der freien Atmosphäre. (Hierzu Tafel II u. III)	293
2. O. Lehmann. Die Struktur tropfbar-flüssiger Mischkristalle	323
3. E. Grüneisen und E. Merkel. Schallgeschwindigkeit in Luft und Wasserstoff von 0° C. und 1 Atm.	344
4. Max Planck. Absolute Entropie und chemische Konstante	365

Ausgegeben am 10. Januar 1922.

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. C. Ramsauer und F. Wolf. Leuchtdauer der Spektrallinien im erlöschenden Bogen	373
2. Richard Gans. Das elektrische Molekularfeld	396

	Seite
3. G. Athanasiadis. Neue Methode zur Messung der Magnetisierungs- koeffizienten der Flüssigkeiten	415
4. Richard Gans. Bemerkung zu meiner Arbeit: „Das Verhalten Hertzscher Gitter“	427
5. Richard Gans. Bemerkungen zu der Arbeit „Die Permeabilität des Nickels für schnelle elektrische Schwingungen“ von Richard Gans und Ramón G. Loyarte und die Priorität Arkadiews	429
6. Erich Marx. Bemerkung zu der Arbeit von B. Kurze: „Einiges zur Theorie der Elektrizitätsleitung in Flammgasen“	436

Ausgegeben am 7. Februar 1922.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. Gregor Wentzel. Funkenlinien im Röntgenspektrum . .	437
2. Felix Kämpf. Beitrag zur Kenntnis der Elektrizitätsleitung in festen, elektronisch schlecht leitenden Körpern. Versuche am Quecksilberjodid	463
3. Übernahme von photometrischen Registrierungen durch das Physikalische Institut der Universität Hamburg	497

Ausgegeben am 24. Februar 1922.

Vierundzwanzigstes Heft.

1. Richard Weichmann. Ein Bandenabsorptionsspektrum des Wassers bei Wellenlängen von mehreren Dezimetern	501
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gas- moleküle gegenüber langsamen Elektronen. I. Fortsetzung .	546
Namenregister zum Jahrgang 1921	559

Ausgegeben am 22. März 1922.

Nachweis zu den Figurentafeln

Tafel I. R. Minkowski.

„ II. } E. v. Angerer

„ III. } u. R. Ladenburg.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 66.

1. Die Austrittswahrscheinlichkeit kolloidaler Teilchen und verwandte Begriffe; von Eberhard Buchwald.

Einleitung.

1. Das Erscheinungsgebiet der Konzentrationsschwankungen stellt uns im wesentlichen vor zwei Probleme: das der Schwankungsgröße und das der Schwankungsgeschwindigkeit. Das erste ist verhältnismäßig einfach zu behandeln und seit langem erledigt; das zweite, weit schwierigere, gelöst zu haben ist eine der letzten Leistungen Smoluchowskis gewesen. Hier spielt der neue Begriff der *Wahrscheinlichkeitsnachwirkung* — die man auch *Wahrscheinlichkeitskoppelung* nennen könnte — eine überragende Rolle: zählt man in gleichen Zeitabständen τ die Teilchen, die sich in einem abgegrenzten Volumen v einer kolloidalen Lösung befinden, so folgt bei genügend großem τ aus elementaren Betrachtungen die Beziehung

$$(1) \quad \overline{\Delta^2} = 2v,$$

wo Δ die Differenz aufeinander folgender Teilchenzahlen, v die mittlere Teilchenzahl und die Überstreichung Mittelwertbildung bedeutet. Wählt man aber τ klein genug, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß ein einmal mitgezähltes Teilchen sich auch bei der nächsten Beobachtung noch innerhalb v befinde, und diese Wahrscheinlichkeitskoppelung zwischen den einzelnen Zahlenwerten wirkt dahin, daß die Δ im Mittel kleiner werden als im unabhängigen Falle. Auf der rechten Seite von (1) tritt ein echter Bruch P als Faktor hinzu:

$$(2) \quad \overline{\Delta^2} = 2vP$$

und P erweist sich nach der Theorie als die *Wahrscheinlichkeit, daß ein anfänglich irgendwo in v befindliches Teilchen nach der Zeit τ nicht mehr darin sei.*

Die Smoluchowskische Theorie ist an Kolloiden, wenn man von einer älteren Arbeit Svedbergs absieht, die nicht ad hoc angestellt ist und sich für den vorliegenden Zweck z. T. wenig eignet, nur in zwei Mitteilungen Westgrens¹⁾ geprüft worden. Die beiden Mitteilungen unterscheiden sich durch die Form von v . Wir interessieren uns für die zweite Arbeit, wo v ein flacher Kreiszylinder ist, dessen Grundflächen durch Glasplatten gebildet werden, während die Mantelfläche, durch die allein der Teilchenverkehr mit der übrigen Flüssigkeit stattfindet, optisch durch eine kreisförmige Blende im Okular festgelegt ist. Das Prüfverfahren ist in beiden Arbeiten gleich: Δ und v in (2) werden durch vielhundertmalige Zählung der Teilchen in v ermittelt, und für P wird ein von Smoluchowski errechneter Ausdruck herangezogen²⁾, der im Falle des zylindrischen Volumens die Form hat:

$$(3) \quad P = e^{-2a} \{J_0(2i\alpha) - iJ_1(2i\alpha)\}.$$

Hierin ist

$$(4) \quad \alpha = \frac{a^2}{4Dt},$$

$$(5) \quad D = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{6\pi\eta r}$$

(J_0 und J_1 Besselsche Funktionen in der üblichen Bezeichnung, a Radius der Grundflächen des Zylinders, D Diffusionskonstante, t Zeit, R Gaskonstante, T absolute Temperatur, N Loschmidtsche Zahl pro Mol, η Koeffizient der inneren Reibung des Dispersionsmittels, r Teilchenradius). Da alle Größen bekannt oder meßbar sind, ist eine Prüfung der Beziehung (2) möglich. Nach Westgrens Darstellung wird (2) bestätigt.

§ 1. Die Außenwahrscheinlichkeit P .

2. Den Ausgangspunkt des Folgenden bildet das Bestreben, die Smoluchowskische Theorie in Gestalt der Beziehung (2) noch auf eine zweite Weise mit der Erfahrung zu vergleichen:

1) A. Westgren, Arkiv f. Mat. Svensk. Vet. Ak. 11. Nr. 14. 1916 und 13. Nr. 14. 1918.

2) M. v. Smoluchowski, Physikal. Zeitschr. 17. S. 557. 1916. Gleichung (17).

nämlich auf die ursprüngliche Bedeutung von P zurückzugehen und dem statistisch gefundenen $\overline{A^2}/2v$ ein gleichfalls statistisch gewonnenes P gegenüberzustellen, das man findet, indem man häufig beobachtet, ob ein bei $t = 0$ in v befindliches Teilchen sich zur Zeit t außerhalb befindet, und den Bruchteil aller untersuchten Teilchen feststellt, der bei t nicht mehr darin ist. Dieser Bruchteil, eine Funktion von t , ist das gesuchte P .

P wird gelegentlich als Diffusionsfaktor bezeichnet. Wir vermeiden diesen etwas farblosen Ausdruck und nennen P auch nicht *Austrittswahrscheinlichkeit*, um nicht die Vorstellung zu erwecken, daß es sich um die Wahrscheinlichkeit handele, bis zur Zeit t ausgetreten zu sein. Vielmehr darf das Teilchen bis t beliebig häufig die Grenzfläche durchschritten haben; es kommt nur darauf an, ob es bei t außen ist. Daher werde P die *Außenwahrscheinlichkeit* genannt.

3. Beobachtet wurde an einem Ultramikroskop mit Kardiodkondensator¹⁾ (Objektiv C, Okular: Kompensationsokular 18) ein in einer Quarzkammer²⁾ befindliches Selenhydrosol, das nach der Vorschrift hergestellt war³⁾: 100 ccm einer $1 \cdot 10^{-3}$ Mol pro Liter selenige Säure enthaltenden Lösung wird mit 1 ccm 50proz. Hydrazinhydrat versetzt, etwa eine halbe Stunde lang auf dem Wasserbade erwärmt und mit reinstem Wasser geeignet verdünnt. Die annähernde Gleichförmigkeit dieses Sols kann nach der Westgrenschen Dissertation⁴⁾ und seiner Untersuchung über die Gleichförmigkeit von Goldhydrosolen⁵⁾ als sichergestellt angesehen werden. Als die v umgrenzende „Blende“ im Okular — eine Blende, die die Teilchenverfolgung innerhalb und außerhalb von v ermöglichen muß — diente ein Tuschefleck auf einem Deckglase, den man nach einigem Probieren genügend kreisrund herausbekommt. Sein Durchmesser betrug $5,39 \cdot 10^{-2}$ cm, was im Objekt einem Radius des v von

$$a = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

entspricht.

1) H. Siedentopf, Verh. d. D. Phys. Ges. 12. S. 6. 1910.

2) H. Siedentopf, a. a. O. S. 18.

3) A. Gutbier, Zeitschr. f. anorg. Chem. 32. S. 106. 1902.

4) A. Westgren, Diss. Upsala 1915; vgl. auch Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. 89. S. 63. 1915, bes. S. 68.

5) A. Westgren, Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chem. 94. S. 193. 1916.

4. Nach dem Schlage eines Metronoms werden in gleichen Zeitabständen τ (1 bis $1\frac{1}{2}$ Sekunde) einerseits die Teilchen in v gezählt und aus der Zahlenreihe der Ausdruck $\Delta^2/2v$ gebildet, und zwar (unter vielleicht allzu ausgiebiger Verwertung der Reihe, vgl. Nr. 6) für die Zeiten $\tau, 2\tau \dots$. Andererseits werden durch die Verfolgung von einigen hundert Einzelteilchen Aufzeichnungen¹⁾ von folgendem Typus gewonnen:

1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ	8τ	9τ	10τ
+	+	+	0	+	0	+	0	0	0

+ = innerhalb von v ,
0 = außerhalb von v .

Eine besondere Vorsichtsmaßregel muß getroffen werden, damit man unter den Teilchen, die man bei $t = 0$ in v vorfindet, *ohne Willkür* nach reinem Zufall das zu verfolgende auswähle. Zu diesem Zwecke wurde vor jeder Teilchenverfolgung blindlings auf ein mit vielen gleichen Kreisen bedecktes Papier getippt und dasjenige Teilchen gewählt, das bei $t = 0$ dem getroffenen Punkt am nächsten war.

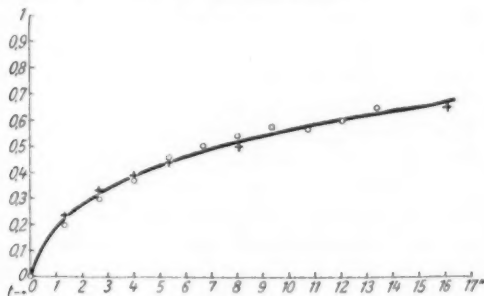


Fig. 1.

5. Tab. 1 faßt eine Beobachtungsreihe von 600 Teilchen zusammen. Von ihnen waren (Reihe 2) im Zeitpunkt $1\tau = 1,34''$ 118 nicht in v , im Zeitpunkt 2τ 179 usw., so daß sich für P (Reihe 3) die Werte $\frac{118}{600} = 0,197$, $\frac{179}{600} = 0,298$ usw. ergeben.

1) Für bereitwillige Unterstützung bei sämtlichen Beobachtungsreihen bin ich Hrn. stud. Quarder zu Dank verpflichtet.

Die Kreise der Fig. 1 geben graphisch die gefundenen P -Werte. Aus 6000 anscheinend ganz zusammenhanglosen Einzeldaten solch glatte Gesetzmäßigkeit herauspringen zu sehen bildet den Hauptreiz statistischer Messungen.

Tabelle 1.

$$\tau = 1,34''$$

t	Anzahl außerhalb	P	α	αt
1 τ = 1,34''	118	0,197	8,07	10,8
2 τ = 2,68''	179	0,298	3,44	9,2
3 τ = 4,02''	223	0,372	2,15	8,6
4 τ = 5,36''	271	0,452	1,41	7,6
5 τ = 6,70''	297	0,495	1,14	7,6
6 τ = 8,04''	320	0,533	0,96	7,7
7 τ = 9,38''	342	0,570	0,81	7,6
8 τ = 10,72''	344	0,573	0,80	8,6
9 τ = 12,06''	365	0,608	0,68	8,2
10 τ = 13,40''	388	0,645	0,57	7,6

Reihe 4 der Tab. 1 gibt das nach Gleichung (1) zu P gehörige α , zu entnehmen aus einer von Westgren¹⁾ berechneten Tabelle oder aus den Jahnke-Emde-Tafeln S. 130 ff. Reihe 5 enthält αt , das nach Gleichung (3) konstant gleich $a^2/4D$ sein soll. Diese Konstanz ist von 3τ ab mit aller wünschenswerten Genauigkeit erfüllt; daß der Wert bei 2τ etwas zu hoch ist, ist eine Eigentümlichkeit gerade dieser Versuchsreihe. Dagegen ergibt sich der Wert bei 1τ fast durchweg zu hoch, d. h. P wird hier zu klein gefunden (vgl. Fig. 1). Das dürfte darauf zu schieben sein, daß man bei

1) A. Westgren, a. a. O. (II. Mitteilung) S. 4/5.

der Auswahl des zu verfolgenden Teilchens doch nicht ganz wahllos verfährt, sondern unbewußt das bequemer liegende, vom Rande weiter entfernte aussucht. Immerhin würde ein Mehr von nur 3 Proz. der Gesamtzahl, bei 1τ außerhalb gezählt, genügen, um den αt -Wert auch für 1τ auf den für die übrigen Zeiten geltenden Mittelwert

$$(6) \quad \alpha t = 8,1$$

herunterzudrücken.

Mit diesem bei sämtlichen Beobachtungsreihen annähernd wiedergefundenen Werte ist die ausgezogene Kurve in Fig. 1 nach Gleichung (3) gezeichnet, und er ist allem folgenden zugrunde gelegt. Aus ihm ergibt sich mit $a = 1,08 \cdot 10^{-3}$ (Nr. 3)

$$D = 3,60 \cdot 10^{-8}$$

und aus Gleichung (5) mit

$$\begin{aligned} T &= 294^\circ, \\ R &= 8,315 \cdot 10^7, \quad ^1) \\ N &= 6,064 \cdot 10^{23}, \quad ^1) \\ \eta &= 0,00980 \quad ^2) \end{aligned}$$

der Teilchenradius zu

$$r = 60,6 \mu\mu$$

oder, wenn man den hemmenden Einfluß der Grundflächen von v berücksichtigt, der bei deren geringer Entfernung $2L = 2,12 \mu$ merklich ins Gewicht fällt, und nach der von Westgren³⁾ korrigierten Formel

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta r \left\{ 1 + \frac{9r}{16(L-r)} \ln \frac{L}{r} \right\}}$$

rechnet, zu

$$r = 55,4 \mu\mu.$$

6. Die zu Tab. 1 gehörige Teilchenzählung, bestehend aus 1200 Ziffern

2 0 1 1 1 2 2 3 0 1 1 1 1 1 1 2 2 2 1 2 2 1 0 1 ...,

1) R. Ladenburg, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. 17. S. 93. 1920.

2) R. Hosking, Phil. Mag. 18. S. 260. 1909; Landolt-Börnstein, 4. Aufl. S. 77.

3) A. Westgren, a. a. O. (II. Mitteilung) S. 7.

ist durch Tab. 2 wiedergegeben, deren erste Reihe die entscheidende Kombination $\overline{A^2}/2\nu$ angibt, worin $\nu = 1,324$ war. Diese Werte sind als Kreuze in Fig. 1 eingezeichnet und passen sich der P -Kurve so gut an, daß man von einer Bestätigung der Smoluchowskischen Beziehung (2) sprechen kann, ebensogut wie bei Westgren.

Tabelle 2.

$$\tau = 1,34''.$$

t	$\overline{A^2}/2\nu$	α	αt
1 τ = 1,34''	0,236	5,59	7,5
2 τ = 2,68''	0,331	2,75	7,4
3 τ = 4,02''	0,390	1,96	7,9
4 τ = 5,36''	0,445	1,46	7,8
6 τ = 8,04''	0,500	1,11	8,9
12 τ = 16,08''	0,654	0,55	8,8

Doch besteht ein Bedenken: bestimmen wir nach Gleichung (3), in der wir nunmehr P mit unserm $\overline{A^2}/2\nu$ identifizieren, zu den Werten der Reihe 1 (Tab. 2) die α - und die αt -Werte, so ergeben sich die Reihen 2 und 3. αt wird zwar in genügender Übereinstimmung mit Tab. 1 im Mittel zu 8,0 gefunden; die αt -Werte zeigen aber einen Gang, der in dieser Beobachtungsreihe verhältnismäßig wenig ausgesprochen, in den meisten andern aber wiederzufinden ist, bald nach oben, bald nach unten gehend.

Ziehen wir zum Vergleich die vier Westgrenschen Beobachtungsreihen heran, die ihm zur Bestätigung der Smoluchowskischen Theorie dienen¹⁾, so bietet sich das Bild der Tab. 3.

1) A. Westgren, a. a. O. (II. Mitteilung) S. 11 ff.

Tabelle 3.
 αt (Westgren).

t	1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe	4. Reihe
1 τ	1,16	3,62	9,96	14,6
2 τ	1,36	4,48	9,55	14,5
3 τ	1,31	5,60	8,73	16,7
4 τ	1,25	5,65	8,82	15,7
5 τ	—	6,38	8,30	17,6
7 τ	0,90	—	—	—
10 τ	0 ¹⁾	—	—	—
berechn. = $\frac{a^2}{4D}$	1,24	4,86	8,27	19,5

Für die Zeitpunkte 1 τ , 2 τ ... (wobei τ von Reihe zu Reihe verschieden ist: 1. Reihe $\tau = 0,95''$; 2. Reihe $\tau = 0,947''$; 3. Reihe $\tau = 1,50''$; 4. Reihe $\tau = 1,579''$) sind die aus Westgrens Messungen folgenden αt -Werte zusammengestellt; hinzugefügt ist der sich aus $\alpha t = \frac{a^2}{4D}$ ergebende Wert. Der Gang des αt ist in der 1. und 2. Beobachtungsreihe auffallend und auch in der 3. und 4. noch sehr merkbar. Der theoretisch geforderte Wert wird in der 1. und 2. Reihe bei mittleren Zeiten, in der 3. bei großen Zeiten, in der 4. überhaupt nicht erreicht. ²⁾

Dieser bemerkenswerten Tatsache wird bei Westgren nicht Erwähnung getan. Von ihr Rechenschaft zu geben dürfte unmöglich sein ohne eingehende Kritik der Art und Weise, wie das Beobachtungsmaterial bei Westgren und bei uns in Tab. 2 verwertet wird und wie weit es zulässig ist, es so zu verwerten. ³⁾ Darf man z. B. das zu 12 τ gehörige $\overline{A^2}$

1) Hierbei ist das Westgrensche $\overline{A^2}/2\nu$ gleich 1 angenommen. Tatsächlich liegt es sogar etwas über 1.

2) Bei den Beobachtungen am eindimensionalen Falle (Westgren a. a. O., I. Mitteilung) ergibt sich der αt entsprechende Ausdruck merklich konstanter.

3) Bemerkungen hierüber verdanke ich Hrn. E. Schrödinger.

durch Zusammenfassung der 1., 13., 25., 37., der 2., 14., 26., 38., der 3., 15., 27. Ablesung berechnen, da doch die Ziffern dieser verschiedenen Teilreihen miteinander gekoppelt sind und man korrekterweise dem $\overline{A^2}$ für 1τ , das aus 1200 um 1τ abstehenden Werten gewonnen ist, ein $\overline{A^2}$ für 12τ gegenüberstellen müßte, das man aus 1200 um 12τ abstehenden Ablesungen gefunden hat? Können nicht bei dieser Verwertung individuelle Eigentümlichkeiten der Reihe, etwa Gruppen von außergewöhnlich verschiedenen oder benachbarten Ziffern, dahin wirken, daß ein systematischer Gang in $\overline{A^2}$ und damit in αt vorgetäuscht wird? Denn man kann ebenso wohl Eigenheiten ausfindig machen, die, einer Beobachtungsreihe aufgeprägt, bei unserer Rechenmethode mit wachsendem Zeitabstand steigenden Einfluß auf $\overline{A^2}$ gewinnen wie umgekehrt. Der Weg, diese Probleme zu behandeln, erscheint vorgeschrieben, soll aber an dieser Stelle nicht verfolgt werden.¹⁾

§ 2. Die Austrittswahrscheinlichkeit P_2 .

7. Vielmehr mögen die Überlegungen des § 1 in der Richtung ausgebaut werden, daß wir der Außenwahrscheinlichkeit P eine Austrittswahrscheinlichkeit P_2 gegenüberstellen, die wir definieren als die Wahrscheinlichkeit für ein irgendwo in v befindliches Teilchen, innerhalb der Zeit t auszutreten. Dabei darf das Teilchen nicht wie bei P das Volumen beliebig verlassen und betreten, sondern scheidet mit dem Augenblicke des ersten Austritts aus der Betrachtung aus.

8. Der theoretische Ausdruck für P_2 , der an die Stelle der Beziehung (3) tritt, ist wie dieser aus den Gedankengängen der Diffusionstheorie zu entwickeln. Diffusionstheoretisch gesprochen läßt sich P auffassen als der „Bruchteil einer anfänglich den Raum v gleichmäßig erfüllenden Substanz, welcher in der Zeit t über dessen Grenzen hinausdiffundieren würde, falls der äußere Raum anfangs von jener Substanz völlig leer wäre.“²⁾ Bei P_2 dagegen haben wir eine v anfänglich gleich-

1) U. a. hierzu wird die demnächst erscheinende physikalische Doktorarbeit von Hrn. Dr. med. Silberberg Material beibringen.

2) M. v. Smoluchowski, Physikal. Zeitschr. 17. S. 563. 1916.

mäßig erfüllende Substanz anzunehmen und dem Verschwinden der Teilchen beim Austritt dadurch Rechenschaft zu tragen, daß wir an der Mantelfläche für alle Zeiten die Teilchendichte $\varrho = 0$ vorschreiben. Fügen wir hinzu, daß ϱ für $r = 0$ (r Radiusvektor) endlich bleiben muß, so ist das Problem festgelegt und nach der Fourierschen Methode¹⁾ zu lösen.

Hiernach setzen wir als Lösung der Diffusionsgleichung

$$(7) \quad \varrho = \sum_n^{1.. \infty} A_n e^{-D \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$$

und bestimmen die Konstanten λ_n aus der Rand-, die Konstanten A_n aus der Anfangsbedingung. Die Randbedingung verlangt die $\lambda_n a$ (a Volumradius) gleich den Wurzeln z_n der Besselschen Differentialgleichung 0ter Ordnung; die A_n findet man, indem man die für $t = 0$ geltende Gleichung

$$(8) \quad \varrho_0 = \sum_n^{1.. \infty} A_n J_0(\lambda_n r)$$

(ϱ_0 konstante Anfangsdichte) mit $r J_0(\lambda_n r)$ erweitert und von 0 bis a integriert. Unter Zuhilfenahme bekannter Beziehungen ergibt sich

$$(9) \quad A_n = \frac{2 \varrho_0}{z_n J_1(z_n)}$$

(J_1 Besselsche Funktion 1. Ordnung) und damit

$$(10) \quad \varrho = \varrho_0 \cdot 2 \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{z_n J_1(z_n)} e^{-\frac{D z_n^2 t}{a^2}} J_0\left(\frac{z_n}{a} r\right).$$

Hieraus findet man als mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ zur Zeit t

$$(11) \quad \bar{\varrho} = \frac{2 \pi \int_0^a \varrho r dr}{a^2 \pi} = 4 \varrho_0 \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{z_n^2} e^{-\frac{D z_n^2 t}{a^2}}.$$

$\bar{\varrho}/\varrho_0$ ist als *Bleibewahrscheinlichkeit* Q_2 aufzufassen, d. i. als Wahrscheinlichkeit für ein anfangs irgendwo in v befind-

1) M. Fourier, *Analyt. Theorie der Wärme*, deutsch von B. Weinstein, 6. Kapitel.

liches Teilchen, bis t das Volumen *nicht* verlassen zu haben. Das gesuchte P_2 ist gleich $1 - Q_2$:

$$(12) \quad P_2 = 1 - 4 \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{D z n^2 t}{a^2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwischen t und $t + dt$ auszutreten, folgt hieraus durch Differentiation nach t :

$$(13) \quad dP_2 = dt \cdot \frac{4D}{a^2} \sum_n^{1.. \infty} e^{-\frac{D z n^2 t}{a^2}}.$$

9. Hinzugefügt seien die nach der gleichen Methode für den eindimensionalen Fall berechneten analog gebauten Ausdrücke (die zwischen den Deckgläsern eingeschlossene Flüssigkeit ist dabei optisch durch eine spaltförmige Blende im Okular begrenzt)

$$(10') \quad \varrho = \varrho_0 \frac{4}{\pi} \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{D[(2n-1)\pi]^2 t}{a^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{a} \quad \left. \vphantom{\sum_n} \right\} \text{Spalt}$$

und

$$(12') \quad P_2 = 1 - 8 \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{[(2n-1)\pi]^2} e^{-\frac{D[(2n-1)\pi]^2 t}{a^2}} \quad \left. \vphantom{\sum_n} \right\}$$

(a Schichtbreite) und die gelegentlich von Smoluchowski¹⁾ für den Fall der Kugel erwähnten

$$(10'') \quad \varrho = \varrho_0 \frac{2a}{\pi r} \sum_n^{1.. \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{D n^2 \pi^2 t}{a^2}} \sin \frac{n\pi r}{a} \quad \left. \vphantom{\sum_n} \right\} \text{Kugel}$$

und

$$(12'') \quad P_2 = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_n^{1.. \infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{D n^2 \pi^2 t}{a^2}}$$

(a Kugelradius).

1) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124 (IIa) S. 339. 1915. Gl. (39) und (40).

Ferner sei für die drei Fälle die *wahrscheinliche Aufenthaltsdauer oder Austrittserwartungszeit* T_2 nach

$$T_2 = \int_0^{\infty} \frac{\bar{q}}{q_0} dt$$

berechnet¹⁾:

$$(14) \quad \text{Zylinder: } T_2 = \frac{4a^3}{D} \sum_n^{1.. \infty} \left(\frac{1}{z_n} \right)^4,$$

$$(14') \quad \text{Spalt: } T_2 = \frac{8a^3}{D} \sum_n^{1.. \infty} \left(\frac{1}{(2n-1)\pi} \right)^4,$$

$$(14'') \quad \text{Kugel: } T_2 = \frac{6a^3}{D} \sum_n^{1.. \infty} \left(\frac{1}{n\pi} \right)^4.$$

Schließlich sei der Zusammenhang zwischen P_2 und

$$(15) \quad \gamma = \frac{Dt}{a^2}$$

tabellarisch festgelegt (Tab. 4).

Tabelle 4.

γ	P_2	γ	P_2	γ	P_2
0,01	0,215	0,10	0,606	0,40	0,932
0,02	0,299	0,12	0,652	0,45	0,949
0,03	0,360	0,14	0,691	0,50	0,961
0,04	0,411	0,16	0,725	0,55	0,971
0,05	0,453	0,18	0,755	0,60	0,979
0,06	0,491	0,20	0,782	0,65	0,984
0,07	0,523	0,25	0,838	0,70	0,988
0,08	0,553	0,30	0,878	0,75	0,991
0,09	0,581	0,35	0,909	0,80	0,993

Der Forderung eines konstanten αt im Falle des P ist jetzt die Forderung eines konstanten γ/t an die Seite zu stellen.

1) Der Wert für die Kugel schon bei Smoluchowski a. a. O. Gl. (42).

10. Die experimentelle Prüfung der abgeleiteten Beziehungen wird mit der Stoppuhr in der Weise durchgeführt, daß bei $t = 0$ eins der in v befindlichen Teilchen nach Zufall ausgewählt (vgl. Nr. 4) und der Zeitpunkt seines ersten Austritts gestoppt wird. Diese Beobachtung wird häufig wiederholt, und von jeder gefundenen Zahl werden 0,2" als persönliche Gleichung abgezogen. Dann wird eine Beobachtungsreihe

Tabelle 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	Ausgetret. während $t \dots t+1$	dP_1 exper.	dP_2 theoret.	Aus- getreten bis t	P_1 exper.	P_1 theoret.	P_2 exper. korr.	$\frac{\gamma}{t}$ exper.
0"	216	0,309	0,364	0	0	0	0	—
1"	96	0,137	0,133	216	0,309	0,364	0,364	0,022
2"	77	0,110	0,091	312	0,446	0,497	0,490	0,024
3"	54	0,077	0,071	389	0,556	0,588	0,591	0,027
4"	45	0,064	0,057	443	0,633	0,659	0,663	0,028
5"	38	0,054	0,047	488	0,697	0,716	0,721	0,029
6"	24	0,034	0,039	526	0,751	0,763	0,771	0,029
7"	32	0,046	0,033	550	0,786	0,802	0,803	0,029
8"	20	0,029	0,027	582	0,831	0,835	0,844	0,030
9"	13	0,019	0,022	602	0,860	0,862	0,870	0,031
10"	20	0,029	0,019	615	0,879	0,884	0,887	0,031
11"	15	0,021	0,016	635	0,907	0,903	0,913	0,031
12"	10	0,014	0,013	650	0,929	0,919	0,933	0,033
13"	1	0,001	0,011	660	0,943	0,932	0,946	0,033
14"	7	0,010	0,009	661	0,944	0,943	0,947	0,031
15"	5	0,007	0,007	668	0,954	0,952	0,956	0,031
16"	2	0,003	0,007	673	0,961	0,959	0,963	0,031
17"	6	0,009	0,006	675	0,964	0,966	0,966	0,030
18"	2	0,003	0,005	681	0,973	0,972	0,974	0,031
19"	4	0,006	0,004	683	0,976	0,977	0,977	0,031
20"	—	—	—	687	0,981	0,981	0,983	0,031

nach dem Schema der Tab. 5 verwertet. Hier ist für die Zeiten $t = 0'', 1'', \dots, 19''$ in Spalte 2 angegeben, wie viele unter 700 Teilchen zwischen $t \dots t + dt$ ausgetreten sind, und Division durch 700 führt zu den dP_2 -Werten der Spalte 3. Diese dP_2 -Werte sind in der unteren Hälfte der Fig. 2 (Ordinatenbezeichnung am rechten Rande) eingezeichnet.

Theoretisch ergeben sich aus Gleichung (12) (Gleichung (13) ist wegen des großen Wertes $dt = 1$ zur Berechnung nicht geeignet) mit dem aus Nr. 5 bekannten Werte $\frac{a^2}{4D} = 8,1$ die

dP_2 -Werte der Spalte 4 oder die ausgezogene untere Kurve in Fig. 2. Die Übereinstimmung ist befriedigend; nur der erste Punkt liegt merklich zu tief: die Zahl der zwischen $t = 0$ und $t = 1$ Ausgetretenen ist zu klein gefunden — derselbe Mangel der Beobachtung wie in Nr. 5 und in derselben Weise zu begründen.

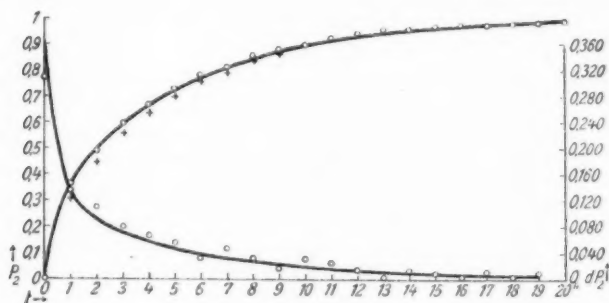


Fig. 2.

11. In der dP_2 -Darstellung bewirkt dieser Fehler im ersten Zeitintervalle nur das Herausfallen eines Punktes. Er macht sich aber, wenn auch mit abnehmendem Einfluß, für den ganzen Kurvenverlauf bemerkbar, wenn wir zu P_2 selbst übergehen (Spalte 6). Hier sind die P_2 -Werte verzeichnet, die aus Spalte 5 (Anzahl der bis t ausgetretenen) folgen; in Spalte 7 finden sich die aus Gleichung (12) berechneten theoretischen Werte. Graphisch ist in Fig. 2 die Spalte 6 durch die Kreuze¹⁾, Spalte 7 durch die ausgezogene obere Kurve wiedergegeben. In der Tat werden auf Grund des ersten auch die übrigen experimentellen Punkte zu tief gefunden.

Jedoch läßt sich zeigen, daß eine Korrektur am ersten Beobachtungspunkt Experiment und Theorie zur Deckung bringt. Nimmt man nämlich an, man hätte in der ersten Sekunde statt $dP_2 = 0,309$ das theoretisch geforderte $0,364$ beobachtet, so entspräche das 255 ausgetretenen Teilchen statt 216. Wir

1) Die Kreuze sind nur für kleine Zeiten gezeichnet; für die größeren fallen sie praktisch mit den gleich zu besprechenden Kreisen zusammen.

schreiben diese Anzahl dem ersten Intervall zu und haben, da dann auf alle übrigen statt 484 nur 445 Teilchen kommen, für jedes Intervall die Zahl der ausgetretenen mit $\frac{445}{484}$ zu multiplizieren, um dieselben relativen Zahlen zu behalten, wie sie der Versuch gibt. Hierdurch wird einerseits die dP_2 -Kurve durch ein wenn auch unbedeutendes Herunterrücken aller Punkte verbessert; andererseits erscheint die so korrigierte experimentelle P_2 -Kurve (Spalte 8 der Tab. 5, Kreise an der oberen Kurve Fig. 2) jetzt im besten Einklange mit der Theorie.

Als Kriterium für die Übereinstimmung von Versuch und Rechnung ist auch die Konstanz der experimentellen γ/t -Werte anzusehen (vgl. Nr. 9). Bestimmt man mit Hilfe von Tab. 4 zu dem experimentellen P_2 die zugehörigen γ/t , so findet man die Zahlen Spalte 9. Wie vorauszusehen, macht sich die Fehlbeobachtung im ersten Zeitintervall hier dadurch bemerkbar, daß die γ/t allmählich zu einem konstanten Werte von rund 0,031 ansteigen, den sie in der neunten Sekunde erreichen. Geht man jedoch von den korrigierten P_2 -Werten aus, so ist die Konstanz des γ/t von vornherein gewahrt. Denn an Stelle der ersten acht Werte treten die folgenden:

0,031; 0,030; 0,031; 0,031; 0,032; 0,032; 0,031; 0,032.

Dieser γ/t -Wert verträgt sich bestens mit dem $\alpha t = 8,1$ der Gleichung (6). Denn hiernach muß sein

$$\frac{\gamma}{t} = \frac{D}{a^2} = \frac{1}{4 \alpha t} = \frac{1}{32,4} = 0,031.$$

Für die *wahrscheinliche Aufenthaltsdauer* berechnen wir nach Gleichung (14)

$$(16') \quad T_{2 \text{ theoret.}} = 3,81'',$$

während die 700 Teilchenbeobachtungen Tab. 5

$$(16) \quad T_{2 \text{ exper.}} = 4,33''$$

ergeben. An anderen Tagen wurden Zahlen gefunden, die dem theoretischen Werte näher lagen. In unserem Fall ist der Unterschied wieder durch die zu geringe Zahl von Teilchen kurzer Aufenthaltszeit (0 bis 1 Sekunde) bedingt.

§ 3. Die Austrittswahrscheinlichkeit P_1 .

12. Man unterscheidet seit Smoluchowski zwischen der *durchschnittlichen* (T_1) und der *wahrscheinlichen Erwartungszeit* (T_2) eines statistischen Ereignisses. Denkt man sich auf der Zeitachse die Zeitpunkte markiert, in denen das Ereignis eintritt, so ist T_1 der Mittelwert der Zeitstrecken zwischen dem Zeitpunkt eines Ereignisses und dem Zeitpunkte des nächsten Ereignisses, während, um T_2 zu finden, der Mittelwert der Zeiten zwischen *jedem* Punkte der Zeitachse und dem des nächsten Ereignisses zu bilden ist. Sind die Ereignisse nach dem Zufall verteilt, so ist $T_1 = T_2$: es dauert z. B. beim Würfelspiel im Mittel ebensolange bis zur nächsten Sechsen, gleichgültig ob ich alle *Sechsen* (T_1) oder alle *Würfe* (T_2) zum Ausgangspunkt der zu mittellenden Zeitstrecken nehme. Anders wenn zwischen den Ereignissen eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung besteht, wie etwa — um ein Beispiel von Smoluchowski¹⁾ zu nennen — zwischen den Durchstoßungen einer in einem Gase gedachten Kugeloberfläche durch ein und dasselbe Gasteilchen. Ist keine Durchstoßung da, so ist im Mittel auch verhältnismäßig lange keine zu erwarten. Ist das Teilchen aber gerade durch die Oberfläche gegangen, so geht es infolge seiner Zickzackbahn vermutlich in rascher Folge noch mehrere Male durch die Oberfläche. In solchen Fällen können T_1 und T_2 von ganz verschiedener Größenordnung sein.

Ein Beispiel aus dem täglichen Leben wäre die Verteilung der Zeitpunkte, in denen ein Mensch die Bahnhofssperre durchschreitet: lockere Schwarmbildung vor Abgang, dichte nach Ankunft eines Zuges. Vom Zeitlichen aufs Räumliche übergehend, könnte man in einem gaserfüllten Raume zwischen dem durchschnittlichen und dem wahrscheinlichen Abstand bis zur nächsten Molekel unterscheiden. Unter normalen Verhältnissen wären beide gleich, bei der Clusterbildung in der Nähe des kritischen Punktes nicht mehr.

Wir sind in der Lage, beide Begriffe einander rechnerisch und experimentell gegenüberzustellen, wenn wir dem § 2, der

1) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124 (IIa). S. 339, 359 ff. 1915.

sich auf eine beliebige Anfangslage des Teilchens bezog, also hinsichtlich des Austrittsereignisses die *wahrscheinliche* Erwartungszeit T_2 lieferte (daher bei uns der Index 2 vor dem Index 1), Betrachtungen über die *durchschnittliche* Erwartungszeit T_1 hinzufügen, d. i. über die Zeit, die im Mittel von einem Eintritt in das Volumen v bis zum nächsten Austritt verstreicht. Dazu haben wir von der *Austrittswahrscheinlichkeit* P_1 auszugehen als der *Wahrscheinlichkeit für ein die Mantelfläche des Volumens durchstoßendes Teilchen, innerhalb der nächsten t Sekunden die Mantelfläche wieder zu durchstoßen*.

13. Anfangslage des Teilchens auf der Mantellinie bedeutet im Sinne der Diffusionstheorie: die Mantellinie ist die Ausgangsstelle der diffundierenden Substanz. Ausscheiden des Teilchens beim nächsten Durchstoßen der Mantellinie aber bedeutet als Bedingung für die Mantellinie $\varrho = 0$. Beiden Bedingungen zugleich ist nicht zu genügen; denn dann müßte jedes Teilchen beim Auftreten augenblicklich verschwinden, und es käme überhaupt keine Diffusion zustande. Auch ist man, um die Versuche darzustellen, genötigt eine empirische „physiologische“ Konstante einzuführen, da man ein Teilchen nur dann als durch die Randlinie eingetreten wertet, wenn es bereits eine gewisse Entfernung δ in das Volumen hinein zurückgelegt hat. Danach ist als Anfangslage der diffundierenden Teilchen eine Kreislinie vom Radius

$$\Delta = a - \delta$$

anzusehen.¹⁾ Die in Nr. 3 gegebenen Daten lassen erwarten, daß Δ von der Größenordnung $\frac{9}{10}$ des Volumradius a sein muß.

Es liegt also das Problem vor, eine Lösung der ebenen Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung

$$\varrho = \varrho' \quad \text{für} \quad \Delta \dots \Delta + dr$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varrho &= 0 & \text{für} \quad r &= a, \\ \varrho &\text{ endlich} & \text{für} \quad r &= 0 \end{aligned}$$

1) Vgl. hierzu eine gleichzeitig in der Physikal. Zeitschr. erscheinende Arbeit.

zu finden. Die Rechnung gestaltet sich folgendermaßen. Wir setzen die Lösung (7) an, finden die $\lambda_n a$ wieder als Wurzeln z_n der Besselschen Differentialgleichung 0ter Ordnung und für die A_n

$$A_n = \frac{\int_0^a \varrho' r J_0(\lambda_n r) dr}{\int_0^a r J_0^2(\lambda_n r) dr}.$$

Das im Nenner stehende Integral ist bekannt gleich

$$\frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a);$$

das im Zähler stehende reduziert sich, wenn wir die Dichte ϱ_0 einführen, die bei anfänglicher Gleichverteilung der vorhandenen Gesamtmasse herrschen würde, auf

$$\varrho_0 \frac{a^2}{2} J_0(\lambda_n a).$$

Damit wird

$$(17) \quad \varrho = \varrho_0 \sum_n \frac{J_0\left(z_n \frac{A}{a}\right)}{J_1^2(z_n)} e^{-\frac{D z_n^2 t}{a^2}} J_0\left(z_n \frac{r}{a}\right),$$

also die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ zur Zeit t :

$$\bar{\varrho} = \frac{2\pi \int_0^a \varrho r dr}{a^2 \pi} = 2 \varrho_0 \sum_n \frac{J_0\left(z_n \frac{A}{a}\right)}{z_n J_1(z_n)} e^{-\frac{D z_n^2 t}{a^2}}.$$

Wie in Nr. 8 ist $1 - \frac{\bar{\varrho}}{\varrho_0}$ als die gesuchte Austrittswahrscheinlichkeit P_1 aufzufassen:

$$(18) \quad P_1 = 1 - 2 \sum_n \frac{J_0\left(z_n \frac{A}{a}\right)}{z_n J_1(z_n)} e^{-\frac{D z_n^2 t}{a^2}}$$

und für die durchschnittliche Aufenthaltsdauer oder Austritts-erwartungszeit T_1 ergibt sich

$$(19) \quad T_1 = \int_0^\infty \frac{\bar{\varrho}}{\varrho_0} dt = \frac{2a^2}{D} \sum_n \frac{J_0\left(z_n \frac{A}{a}\right)}{z_n^3 J_1(z_n)}.$$

14. Bei den Versuchen wird mit der Stoppuhr die Zeit des Eintritts und des nächsten Austritts bestimmt, von der gefundenen Zeitdifferenz aber im Gegensatz zu Nr. 10 keine persönliche Gleichung abgezogen. Tab. 6 gibt eine Beobachtungsreihe von 800 Teilchen. Die Anzahl der bis t (Spalte 1) ausgetretenen Teilchen ist in Spalte 2 angegeben; durch Division mit 800 folgen die experimentellen P_1 -Werte der Spalte 3, in Fig. 3 durch Kreise dargestellt. Die beste Übereinstimmung mit der Theorie ergibt sich, wenn man in Gleichung (18)

$$\frac{A}{a} = 0,86$$

setzt, eine empirische Konstante von der vermuteten Größenordnung, auf deren Zahlenwert kein sonderliches Gewicht zu

Tabelle 6.

t	Ausgetret. bis t	P_1 exper.	P_1 theoret.	t	Ausgetret. bis t	P_1 exper.	P_1 theoret.
1"	458	0,573	0,619	10"	761	0,951	0,950
2"	577	0,721	0,749	11"	765	0,956	0,958
3"	635	0,794	0,810	12"	773	0,966	0,965
4"	664	0,830	0,849	13"	777	0,971	0,970
5"	692	0,865	0,876	14"	782	0,978	0,975
6"	715	0,894	0,897	15"	783	0,979	0,979
7"	731	0,914	0,915	16"	788	0,985	0,982
8"	740	0,925	0,929	17"	790	0,987	0,985
9"	749	0,936	0,940	18"	793	0,991	0,988

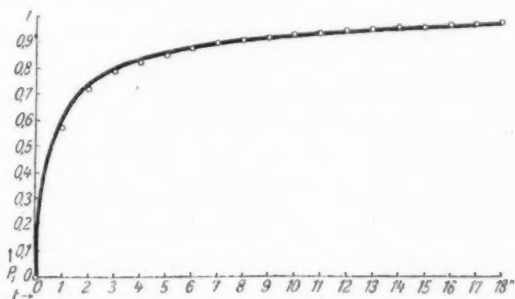


Fig. 3.

legen ist. Hieraus folgen die Werte $P_{1\text{theoret.}}$ der Tab. 6, Spalte 4, und der Kurvenzug in Fig. 3. Wieder liegen die beobachteten Punkte anfänglich etwas zu tief, doch genügt es

wieder, wie man sich leicht überzeugt, den Fehler im 1"-Werte nach dem in Nr. 11 vorgeschlagenen Verfahren auszumerzen, um auch die ersten fünf Punkte auf die Kurve zu verlegen. Von $t = 6''$ ab ist ohnedies die Übereinstimmung erstaunlich.

Für die durchschnittliche Aufenthaltsdauer liefert die Beobachtungsreihe

$$(20) \quad T_1^{\text{exper.}} = 2,27''.$$

Nach Fig. 3 ist vorauszusehen, daß der theoretische Wert nur wenig kleiner ist. Er folgt aus Gleichung (19) zu

$$(20) \quad \begin{cases} T_1^{\text{theoret.}} = 64,8 (0,02559 + 0,00447 + 0,00156 + \dots) \\ = 2,11'' \end{cases}$$

Wichtig ist der Vergleich des experimentellen T_1 (Gleichung (20)) mit dem experimentellen T_2 der Gleichung (16). Im Versuch dürfte damit zum ersten Male der Unterschied beider Begriffe zahlenmäßig dargelegt sein. Die Werte unterscheiden sich rund um den Faktor 2. Eine für diesen Zweck geschicktere Wahl der Volumgröße und des abbildenden Systems, vielleicht auch größere Übung, lassen aber den Δ/a -Wert so viel näher an 1 herankommen, daß T_1/T_2 von kleinerer Größenordnung als 1 wird. Maßgebend dafür ist, daß mit dem an 1 heranrückenden Δ/a alle Zähler in der Summe Gleichung (19) verkleinert werden.

§ 4. Die Außenwahrscheinlichkeit P' .

15. Um die vier vorhandenen Möglichkeiten zu erschöpfen, werde noch die *Wahrscheinlichkeit* definiert, daß ein in v eintretendes Teilchen sich t Sekunden später nicht in v befinde (*Außenwahrscheinlichkeit* P'). Sie hat mit P_1 die Anfangslage am Rande gemein, mit P die Zulässigkeit beliebigen Ein- und Austritts. Nach Nr. 13 ersetzen wir die Anfangslage am Rande durch eine um δ vom Rande, d. h. um $\Delta = a - \delta$ vom Mittelpunkt entfernte. Die Wahrscheinlichkeit, sich zur Zeit t in dem vom Mittelpunkt um R entfernten Flächenelement $R dR d\varphi$ aufzuhalten, dessen Abstand vom Ausgangspunkt ϱ sei, ist

$$\frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{\varrho^2}{4Dt}} R dR d\varphi = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{R^2 + \Delta^2 - 2R\Delta \cos \varphi}{4Dt}} R dR d\varphi,$$

und die gesuchte Außenwahrscheinlichkeit folgt durch Integration zu

$$P' = \frac{e^{-\frac{D^2}{4Dt}}}{2\pi Dt} \int_a^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{R^2}{4Dt}} e^{-\frac{2RA \cos \varphi}{4Dt}} R dR d\varphi$$

oder mit den Abkürzungen (4) und

$$\frac{D^2}{4Dt} = \varepsilon$$

und unter Benützung der Beziehung

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} d\varphi,$$

zu

$$(21) \quad P' = 2e^{-\varepsilon} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty J_0(2ix\sqrt{\varepsilon}) e^{-x^2} x dx.$$

Das Integral, bei den Grenzen 0 und ∞ eine wohl-bekannte e -Funktion¹⁾, dürfte bei den angegebenen Grenzen eine Transzendente für sich darstellen, so daß wir am einfachsten graphisch integrieren.

16. Beobachtungen. Eine elektromagnetische Vorrichtung gestattet, das Metronom im Augenblicke des Teilcheneintritts auszulösen. Sie ist so eingestellt — was sich mit einfachen Mitteln recht genau erreichen läßt —, daß der erste Schlag um $\tau = 0,2''$ ($0,2''$ persönliche Gleichung) nach dem Auslösen und die weiteren je im Abstände τ folgen. Bei jedem Schlage wird nach dem Schema in Nr. 4 die Teilchenlage vermerkt. Tab. 7, an 920 Teilchen gewonnen, bedarf als Gegenstück zu Tab. 1 keiner weiteren Erläuterung. Die theoretischen Werte sind unter Benützung der Andingschen²⁾ Tafeln nach Gleichung (21) berechnet. Aus naheliegenden Gründen bestimmt man praktisch besser die zugehörige Innenwahrscheinlichkeit

1) Vgl. z. B. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. S. 185. Leipzig 1904.

2) E. Anding, Sechsstellige Zahlen der Besselschen Funktionen imaginären Argumentes. Leipzig 1911.

Tabelle 7.

$$\tau = 1,32''.$$

t	Anzahl außerhalb	P' exper.	P' theoret.
1 τ = 1,32''	428	0,465	0,483
2 τ = 2,64''	488	0,531	0,538
3 τ = 3,96''	507	0,551	0,565
4 τ = 5,28''	522	0,568	0,588
5 τ = 6,60''	555	0,604	0,609
6 τ = 7,92''	587	0,638	0,630
7 τ = 9,24''	604	0,657	0,649
8 τ = 10,56''	608	0,662	0,665
9 τ = 11,88''	661	0,719	0,682
10 τ = 13,20''	660	0,718	0,698

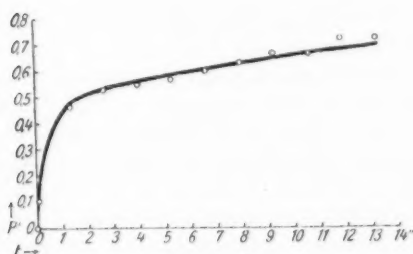


Fig. 4.

$Q' = 1 - P'$; die empirische Konstante, die den genauesten Anschluß der Formel an die Beobachtungen gibt, ist in diesem Falle

$$\frac{A}{a} = 0,95.$$

Der Unterschied gegen das $\frac{A}{a} = 0,86$ in Nr. 14 ist ohne wesentliche Bedeutung; die Hauptsache ist die gute Wiedergabe der experimentellen Werte (Kreise in Fig. 4) durch die ausgezogene Kurve. Um sie richtig zu bewerten, achte man darauf, wie verschieden die vier untersuchten Kurven (Fig. 1 bis 4) trotz ihres gemeinsamen Anfangs und Endes verlaufen.

Zusammenfassung.

§ 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein anfänglich irgendwo in dem abgegrenzten Volumen v eines Sols befindliches kolloidales Teilchen nach Ablauf der Zeit t nicht in v sei (Außenwahrscheinlichkeit P), wird an einem Selenhydrosol für ein zylindrisches Volumen und für verschiedene Zeiten durch Verfolgung zahlreicher Einzelteilchen bestimmt. Unter denselben Versuchsbedingungen wird in äquidistanten Zeitpunkten festgestellt, wie viele Teilchen sich in v befinden und aus der so gewonnenen statistischen Reihe der Ausdruck $\overline{A^2}/2v$ gebildet ($\overline{A^2}$ mittleres Differenzenquadrat aufeinanderfolgender Zählungen, v mittlere Teilchenzahl). Die von der Smoluchowskischen Theorie der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung geforderte Gleichheit von P und $\overline{A^2}/2v$ wird im wesentlichen bestätigt; eine systematische Abweichung wird aufgedeckt.

In § 2 wird wie in § 1 beliebige Anfangslage des Teilchens in v angenommen und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß das Teilchen bis zur Zeit t ausgetreten sei, wobei im Gegensatz zu § 1 der erste Austritt das Teilchen aus der weiteren Betrachtung ausscheiden läßt. Die so definierte Austrittswahrscheinlichkeit P_2 wird berechnet, die Rechnung durch den Versuch bestätigt. Aus P_2 folgt ein Wert für die wahrscheinliche Aufenthaltsdauer oder Austrittserwartungszeit T_2 .

§ 3. Wie bei allen Ereignissen, die nicht rein nach dem Zufall, sondern unter Schwarmbildung über die Zeitachse verteilt sind, ist von der wahrscheinlichen Austrittserwartungszeit T_2 die durchschnittliche T_1 zu unterscheiden. Der Ausdruck hierfür folgt aus dem für die Austritts

wahrscheinlichkeit P_1 , das ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in v eintretendes Teilchen v bis zur Zeit t wieder verlassen habe. Gleichungen für P_1 und T_1 werden hergeleitet und am Versuch geprüft, die Verschiedenheit von T_1 und T_2 festgestellt.

§ 4. Der Vollständigkeit halber wird neben $P P_1 P_2$ die Außenwahrscheinlichkeit P' theoretisch und experimentell untersucht. Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen t Sekunden nach seinem Eintritt in v sich nicht darin befinde.

Mein besonderer Dank gebührt Hrn. A. Eucken, der mir mit großer Liebenswürdigkeit alle benötigten Apparate im Physikalisch-chemischen Institut der Technischen Hochschule Breslau zur Verfügung gestellt hat.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität,
Juli 1921.

(Eingegangen 26. Juli 1921.)

2. *Gekoppelte Schwingungssysteme mit Selbsterregung; von F. Harms.*

Angeregt durch die praktischen Bedürfnisse der drahtlosen Telegraphie, ist in den letzten Jahren eine größere Anzahl von Arbeiten¹⁾ erschienen, die sich wieder mit dem Problem der Koppelungsschwingungen beschäftigen; und zwar sind es jetzt nicht die freien Eigenschwingungen, sondern die selbst-erregten Schwingungen solcher Systeme, die besonders interessieren. Es handelt sich dabei um zwei Fragen, deren Beantwortung man klar auseinanderhalten muß: 1. Welche Schwingungen können entstehen, d. h. von äußerst geringen Anfangsamplituden sich „aufschaukeln“, bzw. welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit sich eine Schwingung überhaupt „aufschaukeln“ kann? 2. Welche Schwingungen sind im stationären Endzustande mit konstanter Amplitude möglich? bzw. welche Bedingungen sind in diesem Falle zu erfüllen?

Zur Beantwortung der ersten Frage hat man ein Integral der Koppelungsdifferentialgleichungen zu suchen von der Form $e^{(\lambda + i\omega)t}$, in welchem λ *positiv* ist. Diese Aufgabe hat Hr. Major Niebauer in einer demnächst erscheinenden Arbeit²⁾ an einigen für den Röhrensender wichtigen Fällen untersucht. Es hat sich dabei ergeben, daß die Antwort auf diese Frage im allgemeinen nicht identisch ist mit der Antwort auf die zweite Frage, daß also im allgemeinen die Frequenzen sich während des Anschwingens ändern, und für den stationären Zustand sich andere Bedingungen ergeben als für die Möglichkeit des Anschwingens.

Meiner Ansicht nach kann man die Verhältnisse am übersichtlichsten darstellen, wenn man von der Theorie der er-

1) H. G. Möller, Die Elektronenröhren, Vieweg 1920; F. Harms, Jahrb. d. drahtl. Tel. 15. S. 442. 1920; H. Vogel u. M. Wien, Ann. d. Phys. 62. S. 649. 1920; K. Heegner, Diss. Jena 1920; W. Rogowski, Arch. f. Elektrotechnik 9. S. 427—438. 1921; 10. S. 1—30. 1921.

2) Diss. Würzburg 1921.

zwungenen Schwingungen ausgeht. Für ein einziges System lautet die Differentialgleichung bekanntlich

$$(1) \quad m_1 x_1'' + k_1 x_1' + a_1^2 x_1 = f(t),$$

wenn man, um die Begriffe zu fixieren, mit $m_1 k_1 a_1^2$ etwa die Masse, Reibung, quasielastische Kraft eines gewöhnlichen Pendels bezeichnet. Die Anregung wollen wir uns so denken, daß das Pendel beim Durchgang durch seine Ruhelage einen Kontakt schließt, der einen Kondensator durch eine Spule 1 entlädt, deren Magnetfeld das Pendel antreibt. In geeigneter Weise möge dafür gesorgt sein, daß die nächste Entladung des Kondensators durch eine Spule 2 erfolgt, die sich auf der anderen Seite des Pendels befindet wie die die Spule 1, usf. Setzt man für den stationären Zustand $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$, so wird man $f(t)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln können, deren erstes, hier allein berücksichtigtes Glied gleich $i \cdot R e^{i\omega t}$ gesetzt werden möge. R hängt nur ab von der bei der Entladung des Kondensators in Bewegung gesetzten Elektrizitätsmenge und den geometrischen Verhältnissen von Spule und Pendel, ist also konstant; der Faktor i bedeutet, daß $f(t)$ gegen x_1 die Phasendifferenz $\pi/2$ hat. Unter diesen Umständen entsteht aus der Differentialgleichung (1) die Gleichung

$$[-m_1 \omega^2 + k_1 i \omega + a_1^2] A_1 = i R,$$

die nach Trennung des Reellen vom Imaginären folgende beiden Gleichungen liefert:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & [-m_1 \omega^2 + a_1^2] A_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{a_1^2}{m_1} \\ \text{und (II)} & A_1 k_1 i \omega = i R \quad \text{oder} \quad A_1 = \frac{R}{k_1 \omega} \end{array} \right.$$

Das so angeregte Pendel schwingt also in seiner ungedämpften Eigenfrequenz und die stationäre Amplitude seiner Schwingungen ist der Eigenschwingungszahl umgekehrt proportional.

Im folgenden werden wir die durch Selbsterregung unterhaltenen Schwingungen einmal von zwei gekoppelten Pendeln und dann von einem Zwischenkreisröhrensender behandeln.

1. Zwei gekoppelte Pendel mit Selbsterregung.

1. *Die Differentialgleichungen.* Zwei Pendel seien durch eine Feder miteinander gekoppelt (Kraftkoppelung). Dann sind die beiden die Bewegung der Pendel beherrschenden Differentialgleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} m_1 x_1'' + k_1 x_1' + (a_1^2 + a_{12}^2) x_1 = a_{12}^2 x_2 + f(t), \\ m_2 x_2'' + k_2 x_2' + (a_2^2 + a_{12}^2) x_2 = a_{12}^2 x_1, \end{cases}$$

wo sich der Index 2 auf das zweite Pendel bezieht, und a_{12}^2 die elastische Konstante der Koppelungsfeder ist. Aus den beiden Differentialgleichungen kann man etwa x_2 eliminieren und erhält für x_1 die Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1'''' + (k_1/m_1 + k_1/m_2) x_1''' + (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + k_1/m_1 \cdot k_2/m_2) x_1'' \\ \quad + (\omega_{10}^2 k_2/m_2 + \omega_{10}^2 k_1/m_1) x_1' + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \alpha^2) x_1 \\ \quad = \frac{1}{m_1} [f''(t) + k_2/m_2 f'(t) + \omega_{20}^2 f(t)]. \end{cases}$$

Dabei sind folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\omega_{10}^2 = \frac{a_1^2 + a_{12}^2}{m_1}; \quad \omega_{20}^2 = \frac{a_2^2 + a_{12}^2}{m_2};$$

$$\omega_{10}^2 \omega_{20}^2 - \frac{a_{12}^4}{m_1 m_2} = \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \alpha^2);$$

ω_{10} und ω_{20} sind also nicht die Schwingungszahlen der freischwingenden Einzelpendel, sondern die des ersten bzw. zweiten Pendels, wenn unter Beibehaltung der Koppelungsfeder das zweite bzw. das erste festgehalten wird.

2. Lösung für den stationären Zustand; Anregung durch das primäre Pendel. Um ein für den stationären Zustand brauchbares Integral zu erhalten, hat man nun für x_1 eine rein periodische Funktion anzusetzen, $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$, und $f(t)$ wie oben als $f(t) = i R e^{i\omega t}$ zu wählen, wenn die Anregung durch Vermittlung des ersten Pendels erfolgen soll. Dann zerfällt die Gleichung (4) durch Trennung des Reellen vom Imaginären in folgende beiden Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad \omega^4 - \omega^2(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + k_1/m_1 \cdot k_2/m_2) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \alpha^2) \\ \quad = - \frac{R}{A_1} \frac{\omega}{m_1} \frac{k_2}{m_2}, \\ \text{(II)} \quad -\omega^3 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) + \omega \left(\omega_{10}^2 \frac{k_2}{m_2} + \omega_{20}^2 \frac{k_1}{m_1} \right) \\ \quad = \frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1} (\omega_{20}^2 - \omega^2). \end{cases}$$

Man erhält also, wie bei der Selbsterregung eines einzigen Pendels, zur Bestimmung von Schwingungszahl und Amplitude zwei Gleichungen. Aus diesen kann man zunächst $R/A_1 m_1$, welches als Funktion von ω aufzufassen ist, eliminieren und erhält dann eine Bestimmungsgleichung für ω^2 . Ist diese ge-

löst, so liefert eine der Gleichungen (I) oder (II) auch die Amplitude A_1 , da ja R nach unseren Voraussetzungen über die Anregung als konstant zu betrachten ist. Die bei der Elimination entstehende Gleichung:

$$(6) \quad (\omega_{10}^2 - \omega^2) \left[(\omega_{20}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{k_2}{m_2} \right)^2 \omega^2 \right] = \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 \kappa^2 (\omega_{20}^2 - \omega^2)$$

ist, wie man sieht, in ω^2 vom 3. Grade, sie liefert also drei oder einen reellen Wert von ω^2 . Die Berechnung von ω^2 aus dieser Gleichung würde zu großen Umständlichkeiten führen, die eine übersichtliche Darstellung von ω^2 als Funktion von ω_{10}^2 , ω_{20}^2 , $(k_2/m_2)^2$, κ^2 unmöglich machen, und die in ähnlichen Fällen zur Einführung von Vereinfachungen gezwungen haben. Die Diskussion der Gleichung ohne jede Vernachlässigung gelingt aber leicht, wenn man umgekehrt ω_{20}^2 als Funktion von ω^2 und den übrigen Variablen darstellt; wenn man also fragt: Wie muß ich das zweite System abstimmen, damit sich eine bestimmte, beliebige Schwingungszahl ω^2 ergibt? Dabei ist nur zu berücksichtigen, daß nicht alle Werte von ω^2 möglich sind, sondern nur solche, die in einem, je nach der Größe der Dämpfung engeren oder weiteren, Bereich um die Resonanzstelle herum liegen.

3. Diskussion der Gleichung für die Koppelungsfrequenzen.

Wir wollen unter Konstanthalten aller übrigen Größen die Kurve der Änderung des ω^2 mit variiertem ω_{20}^2 aufstellen, wir wollen also wissen, wie sich die Schwingungszahl ändert, wenn wir die Abstimmung des sekundären Pendels verändern. Nach dem oben gesagten kehren wir diese Aufgabe um, indem wir ω_{20}^2 als Funktion von ω^2 berechnen. Die Auflösung der Gleichung (6) nach ω_{20}^2 liefert aber eine bequem zu behandelnde quadratische Gleichung für ω_{20}^2 , so daß die Diskussion sehr einfach wird. Wir erhalten nämlich für die Differenz $\omega_{20}^2 - \omega^2$ die Gleichung:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} (\omega_{20}^2 - \omega^2) &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \omega_{10}^2 \kappa^2}{\omega_{10}^2 (1 - \kappa^2) - \omega^2} \\ &\pm \sqrt{-\left(\frac{k_2}{m_2} \right)^2 \frac{\omega^2 (\omega_{10}^2 - \omega^2)}{\omega_{10}^2 (1 - \kappa^2) - \omega^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega^2 \omega_{10}^2 \kappa^2}{\omega_{10}^2 (1 - \kappa^2) - \omega^2} \right)^2} \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nun alle Schwingungszahlen in Bruchteilen von ω_{10} , der Eigenfrequenz des primären Pendels, ausdrücken und ebenso k_2/m_2 in Bruchteilen von ω_{10} ; wir setzen also

$$\frac{\omega^2}{\omega_{10}^2} = \Omega^2; \quad \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} = \Omega_{20}^2; \quad \frac{(k_2/m_2)^2}{\omega_{10}^2} = K^2.$$

Dann wird unsere Gleichung:

$$(8) \quad \Omega_{20}^2 - \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 x^2}{1 - x^2 - \Omega^2} \pm \sqrt{-\frac{K^2 \Omega^2 (1 - \Omega^2)}{1 - x^2 - \Omega^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega^2 x^2}{1 - x^2 - \Omega^2}\right)^2}.$$

Hierin sehen wir x^2 und K^2 als gegebene Konstanten an und können deshalb $\Omega_{20}^2 - \Omega^2$ und damit Ω_{20}^2 als Funktion von Ω^2 darstellen: womit auch die eigentliche Aufgabe, Ω^2 bzw. ω^2 als Funktion von Ω_{20}^2 bzw. ω_{20}^2 darzustellen, gelöst ist.

Bemerkenswert ist, daß in der Gleichung (6) die Dämpfung des primären Pendels überhaupt nicht vorkommt, von dieser sind also die Schwingungszahlen gänzlich unabhängig, während die Dämpfung des sekundären Pendels, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, eine ganz bedeutende Rolle spielt.

Man erkennt aus der Form der Gleichung (8) leicht, daß es für Ω_{20}^2 reelle Werte nur dann gibt, wenn der Ausdruck unter der Quadratwurzel positiv ist, d. h. wenn

$$(9) \quad K^2 \leq \frac{1}{4} \frac{\Omega^2 x^4}{(1 - x^2 - \Omega^2)(1 - \Omega^2)}$$

ist. Läßt man das Gleichheitszeichen gelten, so wird die Quadratwurzel = 0, die beiden Werte von $\Omega_{20}^2 - \Omega^2$ fallen zusammen und ihr gemeinsamer Wert ist:

$$\Omega_{20}^2 - \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 x^2}{1 - x^2 - \Omega^2}.$$

Die durch diese Gleichung gegebene Abhängigkeit bestimmter Werte des Ω^2 von Ω_{20}^2 ist in den Figg. 1 und 2 durch eine gestrichelte Kurve dargestellt. Auf dieser aus zwei Ästen bestehenden Kurve liegen alle die Stellen, an denen die beiden aus Gleichung (8) zu erwartenden Werte von Ω_{20}^2 zusammenfallen, mit anderen Worten: die Maxima und Minima von Ω^2 als Funktion Ω_{20}^2 . Nach Gleichung (9) entspricht jedem Punkt auf dieser Kurve ein bestimmter Wert von K^2 , der eben gerade den Wurzelausdruck zum Verschwinden bringt. Man kann also umgekehrt auch zu jedem Dämpfungswert K^2 einen Punkt auf dieser Kurve finden, der das Maximum von Ω^2 und einen, der das Minimum von Ω^2 gibt. Nimmt man noch hinzu, was man aus der Gleichung (8) leicht ableiten kann, daß für $\Omega_{20}^2 = 0$, $\Omega^2 = 1$, für $\Omega_{20}^2 = \infty$ $\Omega^2 = 1 - x^2$, und wie man am einfachsten aus Gleichung (6) sieht, für $\Omega_{20}^2 = 1$ außer $\Omega^2 = 1$

noch zwei Werte von Ω^2 vorhanden sind, welche symmetrisch zu $\Omega^2 = 1 - \frac{1}{2} K^2$ liegen, so ergeben sich leicht die Kurven der Fig. 1 und 2, in denen die Abhängigkeit der Schwingungszahlen der selbsterregten Schwingungen von der Abstimmung des sekundären Pendels dargestellt ist. Und zwar gilt Fig. 1 für die Koppelung $\kappa^2 = 0,1$ und die Dämpfungen $K^2 = 0$, $K^2 = 0,01$, $K^2 = 0,1$, $K^2 = 0,5$. Für $K^2 = 0$ besteht die Kurve der

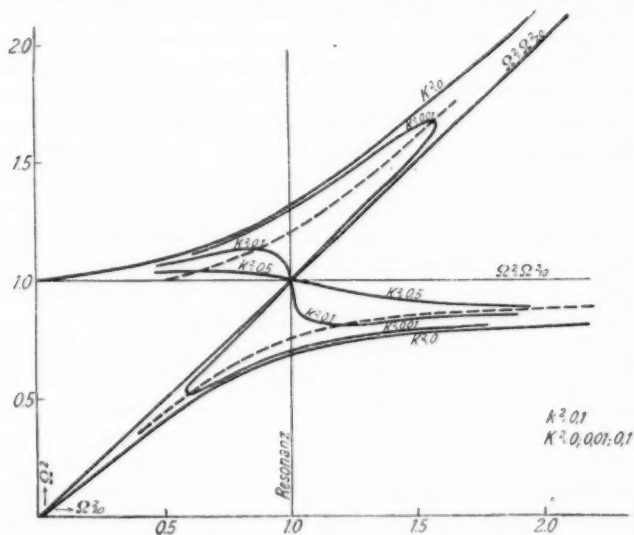


Fig. 1.

Ω^2 aus zwei getrennten Zweigen, die für große Ω_{20}^2 beide ins Unendliche verlaufen; für $K^2 = 0,01$ kehrt der obere Kurvenzweig etwa bei $\Omega_{20}^2 = 1,6$ um, läuft rückwärts durch den Resonanzpunkt $\Omega_{20}^2 = 1$ bis zu einem zweiten Umkehrpunkte etwa bei $\Omega_{20}^2 = 0,6$, um sich dann asymptotisch dem unteren Zweige für $K^2 = 0$ zu nähern. Mit wachsender Dämpfung und wie der Vergleich mit Fig. 2 zeigt, auch mit wachsender Koppelung werden die Umkehrpunkte immer weniger ausgeprägt, bei $K^2 = 0,1$ sind sie schon verschwunden, die Kurve zeigt aber noch an der Resonanzstelle eine sehr plötzliche Änderung der Schwingungszahlen an, die bei der größten dargestellten Dämpfung $K^2 = 0,5$

sich schon sehr abgeflacht hat. Fig. 2 zeigt, wie sich diese Verhältnisse bei stärkerer Koppelung ändern, dort ist für $\kappa^2 = 0,5$ und $K^2 = 0, 0,1, 0,5, 1,0$ die Abhängigkeit des Ω^2 von Ω_{20}^2 dargestellt.¹⁾

Danach können wir die Erscheinungen beim Abstimmen eines aus zwei Pendeln bestehenden, durch das erste Pendel sich selbst erregenden Systems folgendermaßen beschreiben

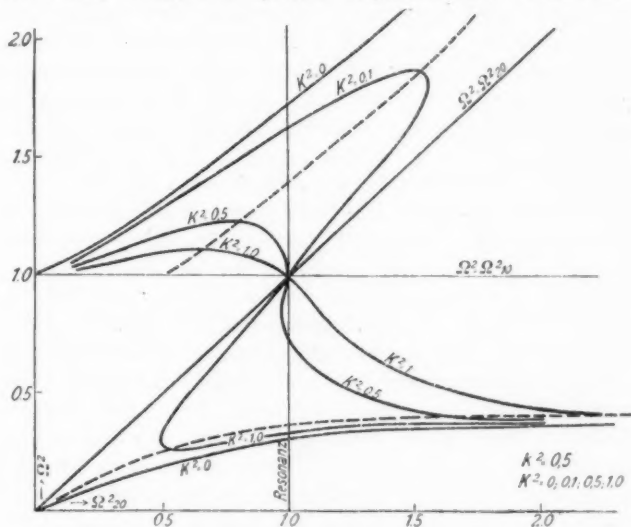


Fig. 2.

(Fig. 1, $\kappa^2 = 0,1$, $K^2 = 0,01$): Pendel II sei zunächst sehr viel länger als I, also $\Omega_{20}^2 = 0$; dann schwingt das Pendel I so, als ob II gar nicht vorhanden wäre mit der Schwingungszahl $\Omega^2 = 1$. II werde dann so langsam verkürzt, daß bei der Verkürzung lauter stationäre Zustände durchlaufen werden; allmählich wächst die Schwingungszahl, erreicht bei $\Omega_{20}^2 = 1$ den Wert 1,3, wächst bei weiterer Verkürzung von II noch weiter bis etwa $\Omega^2 = 1,57$, nimmt dann schnell ab, zunächst noch kontinuierlich, um beim Überschreiten der Stelle $\Omega^2 = 1,6$ plötz-

1) Man vergleiche dazu die bei H. Vogel u. M. Wien a. a. O. angeführten Kurven.

lich auf den viel kleineren Wert von etwa $\Omega^2 = 0,81$ zu springen. Weiteres Verkürzen des Pendels II läßt diesen Wert langsam bis auf $\Omega^2 = 0,90$ wachsen. Dabei beobachtet man noch folgende sehr in die Augen springende Erscheinung: Während des ersten Abschnittes des Abstimmungsexperimentes schwingen die beiden Pendel mit einem Phasenunterschied von etwa π , d. h. sie machen den Eindruck, daß sie *gegen-* und *auseinander* schwingen; nach Überschreiten der Sprungstelle kommt plötzlich eine große Unruhe in die Pendelschwingungen, die beiden Pendel schwingen scheinbar ganz unabhängig voneinander, bis sich allmählich wieder ein stationärer Zustand herstellt, bei dem die Pendel jetzt aber ohne wesentlichen Phasenunterschied schwingen, d. h. man hat den Eindruck, daß sie *miteinander* schwingen. Zur Erklärung dieser Erscheinung vgl. Ziff. 6 S. 34. Beginnt man umgekehrt mit sehr kurzem Pendel, so nimmt bei Verlängerung des Pendels II die Schwingungszahl allmählich ab, um bei $\Omega_{20}^2 = 0,6$, $\Omega^2 = 0,53$ plötzlich auf den viel höheren Wert $\Omega^2 = 1,11$ zu springen; weitere Verlängerung des Pendels II läßt dann Ω^2 noch langsam auf 1,0 abnehmen. Herr stud. K. Krüger hat in einer noch nicht abgeschlossenen Untersuchung die Schwingungen von zwei gekoppelten Pendeln untersucht und dies Verhalten — wie beim „Ziehen“ der Senderröhren — experimentell bestätigt gefunden. Auch den Übergang in die Kurvenform ohne die Umkehrpunkte (z. B. $K^2 = 0,1$ in Fig. 1) hat er durch Vergrößerung der Dämpfung darstellen können.¹⁾ Ob die den zwischen den Umkehrpunkten verlaufenden rückläufigen Ästen der Kurve entsprechenden Schwingungen experimentell herstellbar sind, ist noch nicht sicher. Die Frage, welche der drei möglichen Schwingungen in dem Bereich der Ω_{20}^2 , die zwischen den beiden Umkehrpunkten liegen, wirklich auftreten, wird noch weiter unter behandelt werden (Ziff. 6 u. 7).

4. *Anregung durch das sekundäre Pendel.* Das zweite Pendel mache beim Durchgang durch seine Ruhelage den Kontakt, der das erste magnetisch antreibt. Dieser Fall ist, wie der entsprechende beim Röhrensender²⁾ (Gitterkoppelung vom Sekundär-

1) Man vergleiche dazu noch die Figg. 12—16 der zitierten Arbeit von H. Vogel u. M. Wien.

2) H. Vogel u. M. Wien, Ann. d. Phys. 62. S. 663. 1920.

kreis aus) einfacher zu behandeln als der erste. Wir haben offenbar dieselben Differentialgleichungen wie früher:

$$(3) \quad \begin{cases} m_1 x_1'' + k_1 x_1' + (a_1^2 + a_{12}^2) x_1 = a_{12}^2 x_2 + f(t), \\ m_2 x_2'' + k_2 x_2' + (a_2^2 + a_{12}^2) x_2 = a_{12}^2 x_1. \end{cases}$$

Durch Elimination von x_1 aus diesen Gleichungen ergibt sich für x_2 statt der Gleichung (4) folgende:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_2'''' + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) x_2''' + \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right) x_2'' \\ + \left(\omega_{10}^2 \frac{k_2}{m_2} + \omega_{20}^2 \frac{k_1}{m_1} \right) x_2' + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \kappa^2) x_2 = \frac{1}{m_1 m_2} f(t). \end{aligned}$$

Setzt man x_2 als rein periodische Funktion an $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$, so muß man jetzt $f(t) = i R e^{i\omega t}$ setzen. Mit diesen Werten zerfällt Gleichung (10) in folgende beiden:

$$(11) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad \omega^4 - \omega^2 \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \kappa^2) = 0, \\ \text{(II)} \quad \frac{k_1}{m_1} (\omega_{20}^2 - \omega^2) + \frac{k_2}{m_2} (\omega_{10}^2 - \omega^2) = \frac{R}{m_1 m_2 \omega} \frac{1}{A_2}. \end{cases}$$

Wir erhalten also, wie bei der Selbsterregung eines einzelnen Pendels, die beiden Gleichungen schon in der Form, daß die Schwingungszahl durch die eine allein bestimmt ist, und die zweite nur für die Berechnung der Amplitude nötig ist.

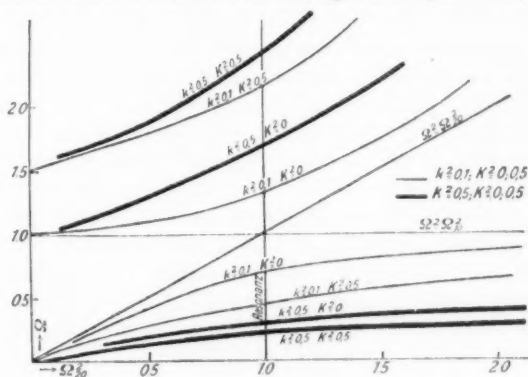


Fig. 3.

5. Diskussion der Gleichung für die Koppelungsschwingungszahlen. Hier ist die Untersuchung der auftretenden Schwingungen sehr einfach; ω^2 berechnet sich allein aus der

Gleichung (I), und da diese in ω^2 nur quadratisch ist, brauchen wir den Kunstgriff von oben gar nicht anzuwenden. Die Abhängigkeit des ω^2 von ω_{20}^2 wird durch eine aus zwei Zweigen bestehende Kurve dargestellt, ganz ähnlich wie bei den freien Eigenschwingungen ungedämpfter gekoppelter Systeme. In Fig. 3 sind für die Koppelung $\kappa^2 = 0,1$ und die Dämpfungen $K^2 = 0; 0,5$ die Kurven eingetragen. Hier hängen im Gegensatz zu dem früheren Fall die Schwingungszahlen sowohl von der Dämpfung des ersten wie von der des zweiten Pendels ab. Die stark ausgezogenen Kurven der Fig. 3 zeigen dasselbe für $\kappa^2 = 0,5$, $K^2 = 0$ und $0,5$. Nach dem bisher gesagten ist noch nicht klar, welche der hier stets möglichen beiden Schwingungen nun eigentlich tatsächlich auftritt und ob nicht etwa beide auftreten können, d. h. dauernde Schwebungen möglich sind.

6. Können die unter 3. und 5. berechneten Koppelungsschwingungen immer auftreten? Zur Beantwortung dieser Frage benutzen wir die Gleichung (5) und (11) (II). Sie lautet für die Anregung durch das erste Pendel:

$$(12) \quad \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = \frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1 \omega}.$$

k_1/m_1 und k_2/m_2 sind wesentlich positiv; ein Blick auf die Figg. 1 und 2 zeigt, daß $(\omega_{10}^2 - \omega^2)$ und $(\omega_{20}^2 - \omega^2)$ stets dasselbe Vorzeichen haben; also ist die linke Seite der Gleichung (II) unter allen Umständen positiv. Es muß also A_1 dasselbe Vorzeichen haben wie R , was bei der vorausgesetzten Art der Anregung und der Bezeichnung von $f(t)$ selbstverständlich ist. $(\omega_{10}^2 - \omega^2)/(\omega_{20}^2 - \omega^2)$ kann nach Fig. 1 u. 2 alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen, dasselbe ist für R/A_1 möglich, indem sich die Amplitude A_1 ja gerade immer so herstellen muß, daß Gleichung (II) erfüllt wird. Daraus folgt, daß die Amplitude A_1 um so kleiner wird, je näher die resultierende Schwingungszahl an die Eigenschwingungszahl ω_{20}^2 herankommt. Hierdurch könnte praktisch eine Grenze für die herstellbaren Schwingungszahlen gesetzt sein, insofern als die Amplituden so klein werden könnten, daß die Kontakte, welche zur Anregung nötig sind, nicht mehr einwandfrei arbeiten würden. Im übrigen ist von diesem Gesichtspunkte aus sonst kein Grund anzugeben, warum die Kurven Fig. 1 u. 2 nicht auch auf dem Stück zwischen den Umkehrpunkten realisierbar wären.

Für die Anregung durch das sekundäre Pendel lautet die Gleichung (II)

$$(13) \quad \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = \frac{R}{A_2} \frac{1}{m_1 m_2 \omega} \frac{1}{\omega_{20}^2 - \omega^2}.$$

Die linke Seite ist aus denselben Gründen wie oben positiv. Zur Beurteilung des Vorzeichens der rechten Seite müssen wir eine für alle gekoppelten Systeme geltende Regel zu Hilfe ziehen, daß nämlich zwischen den Schwingungen im primären und im sekundären System eine Phasendifferenz besteht, die sich aus der zweiten der Differentialgleichung (3) leicht berechnen läßt, wenn man

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin (\omega t + \Phi)$$

in die Differentialgleichung einsetzt. Man erhält dann

$$\operatorname{tg} \Phi = - \frac{\omega k_2 m_2}{\omega_{20}^2 - \omega^2},$$

und zwar liegt $-\Phi$ zwischen 0 und $\pi/2$, wenn $\omega^2 < \omega_{20}^2$; zwischen $\pi/2$ und π , wenn $\omega^2 > \omega_{20}^2$ ist. Für $\omega^2 = \omega_{20}^2$ wäre $-\Phi = \pi/2$. Bei der langsameren Schwingung ($\omega^2 < \omega_{20}^2$) wird also während der Vergrößerung des ω_{20}^2 von 0 bis ∞ der Phasenunterschied zwischen x_1 und x_2 von 0 an zunehmen ohne den Wert $\pi/2$ ganz zu erreichen, da ja auch ω^2 den Wert ω_{20}^2 nicht ganz erreicht. Bei der schnelleren Schwingung wird unter denselben Umständen Φ von π an abnehmen, ohne $\pi/2$ ganz zu erreichen. Für einigermaßen beträchtliche Werte von $|\omega_{20}^2 - \omega^2|$ (sie dürfen um so kleiner sein, je kleiner die Dämpfung ist) werden bei der langsameren Schwingung die beiden Pendel also ungefähr ohne Phasenunterschied schwingen, also ungefähr gleichzeitig nach rechts und gleichzeitig nach links bei der schnelleren ungefähr mit dem Phasenunterschied π . Diesen Unterschied der schnelleren und langsameren Schwingungen sieht man im Experiment sofort, und kann daran ohne Messung sogleich erkennen, ob man sich in dem Bereich $\omega^2 > \omega_{20}^2$ oder $\omega^2 < \omega_{20}^2$ befindet.¹⁾ Vgl. dazu die Fig. 4, in der für $-\Phi$ der Wert $\pi/4$ angenommen ist bzw. $3\pi/4$.

1) Bei der Erregung durch das erste Pendel kann man wegen dieser Phasenbeziehung in dem Gebiet, in welchem zwei Schwingungen möglich sind, die eine oder die andere beliebig herstellen, je nachdem man die Pendel mit gleicher oder entgegengesetzter gleicher Anfangsamplitude ihre Bewegung beginnen läßt.

Nun war nach unseren früheren Ansätzen $f(t) = i R e^{i \omega t}$, wenn $i_2 = A_2 e^{i \omega t}$ gesetzt war; zwischen $f(t)$ und i_2 soll also eine Phasendifferenz $\pi/2$ bestehen. Dann erhält man für $f(t)$ eine Funktion, die ihrer Phase nach ebenfalls in Fig. 4 gezeichnet ist. Wie man sieht, erfolgen für $\omega^2 < \omega_{20}^2$ die

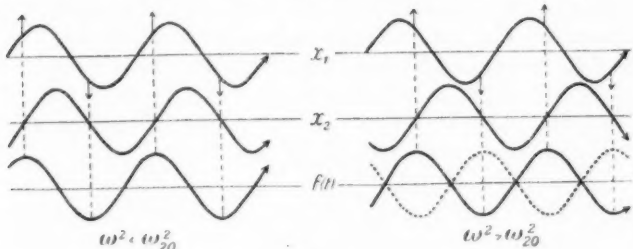


Fig. 4.

durch $f(t)$ dargestellten Anregungsstöße — wenn man sie sich der Einfachheit halber auf die Zeiten der Maxima und Minima von $f(t)$ konzentriert denkt¹⁾ — so, daß sie abwechselnd mit Zeiten positiver bzw. negativer Geschwindigkeit von x_1 eintreten, also jedesmal, wie es sein muß, beschleunigend auf die Bewegung des Pendels I wirken. Für $\omega^2 > \omega_{20}^2$ würden dagegen die Stöße gerade zu solchen Zeiten einsetzen, daß sie die vorhandene Bewegung bremsen. So kann also die schnellere Schwingung ($\omega^2 > \omega_{20}^2$) nicht unterhalten werden. Damit man sie unterhalten kann, muß man $f(t)$ in der Phase noch einmal um π verschieben, d. h. für R einen negativen Wert nehmen oder was dasselbe bedeutet, die Anregungsspulen 1 und 2 (S. 26) miteinander vertauschen. Genau das folgt aber aus der Gleichung (II) für den Fall der Anregung vom sekundären Pendel aus:

$$(13) \quad \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = \frac{R}{A_2 m_1 m_2 \omega} \cdot \frac{1}{\omega_{20}^2 - \omega^2}.$$

Damit die rechte Seite positiv wird, muß für $\omega^2 \leq \omega_{20}^2$ auch $\frac{R}{A_2} \leq 0$ sein. Wenn die Anregung von dem sekundären

1) Der Ort der Maxima und Minima von $f(t)$ ist in der Fig. 4 durch aufwärts bzw. abwärts gerichtete Pfeile an der Kurve für i_1 kenntlich gemacht.

Pendel aus erfolgt, kann also bei einer bestimmten Schaltung der Anregungsspulen nur die eine der beiden möglichen Schwingungen entstehen. Um die andere zu erhalten, muß man die Anregungsspulen vertauschen. Ein „Ziehen“ gibt es also bei dieser Art der Anregung nicht, was mit der ganz ähnlichen Anregungsart von Senderröhren durch Gitterrückkoppelung vom Sekundärkreis aus, die von H. Vogel und M. Wien¹⁾ untersucht sind, übereinstimmt.

7. *Das Anschwingen der Pendel.* Bisher sind nur stationäre Zustände behandelt worden und die Ergebnisse beziehen sich nur auf den Fall, daß eine Schwingung mit bestimmter Amplitude irgendwie hergestellt ist und daß diese dann weiter unterhalten wird. Um die Frage, unter welchen Bedingungen das Anschwingen bis zu dieser konstanten Amplitude stattfinden kann, zu beantworten, gehen wir wieder von der Differentialgleichung aus, die wir oben (Gleichung 4) abgeleitet hatten:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1'''' + (k_1/m_1 + k_2/m_2)x_1''' + (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + k_1/m_1 k_2/m_2)x_1'' \\ + (\omega_{10}^2 k_2/m_2 + \omega_{20}^2 k_1/m_1)x_1' + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - x^2) \\ = \frac{1}{m_1} [f'''(t) + k_2/m_2 f''(t) + \omega_{20}^2 f'(t)]. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir hierin $x_1 = A_1 e^{(\lambda + i\omega)t}$, $f(t) = i R e^{i\omega t}$, so wird x_1 dann wachsen, wenn sich für λ ein positiver Wert angeben läßt. Wir führen die Berechnung nur unter der Annahme durch, daß λ^2 gegen ω^2 vernachlässigt werden kann, was in allen praktisch in Betracht kommenden Fällen erlaubt ist. Aus der Differentialgleichung erhalten wir dann durch Trennung des Reellen vom Imaginären wieder zwei Gleichungen, die, wenn wir in den Potenzen von $(\lambda + i\omega)$ λ^2 gegen ω^2 vernachlässigen, folgende Form annehmen:

$$(14) \quad (I) \quad \left\{ \begin{aligned} & \omega^4 - 3\lambda\omega^2(k_1/m_1 + k_2/m_2) - \omega^2(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + k_1/m_1 k_2/m_2) \\ & + \lambda(\omega_{10}^2 k_2/m_2 + \omega_{20}^2 k_1/m_1) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - x^2) \\ & = -\frac{R}{A_1} \frac{\omega}{m_1} \frac{k_2}{m_2}, \end{aligned} \right.$$

1) H. Vogel u. M. Wien, Ann. d. Phys. 62. S. 663. 1920.

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} -4\lambda\omega^2 - \omega^2(k_1/m_1 + k_2/m_2) + 2\lambda(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2) \\ + k_1/m_1 k_2/m_2 + (\omega_{10}^2 k_2/m_2 + \omega_{20}^2 k_1/m_1) \\ = -\frac{R}{A_1} \frac{1}{\omega m_1} (\omega^2 - \omega_{20}^2). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Hierbei ist noch zu berücksichtigen, daß die Produkte $\lambda k_1/m_1$ und $\lambda k_2/m_2$ von gleicher Größenordnung sind wie λ^2 ; in Gleichung (I) können also die mit λ multiplizierten Glieder gestrichen werden, so daß aus (I) ω^2 berechnet werden kann; es wird nicht wesentlich abweichen von dem Wert, den man als Lösung der Gleichung

$$(15) \quad \omega^4 - \omega^2(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 (1 - \kappa^2) = 0$$

erhält. Diese Gleichung ergibt die gewöhnlichen Koppelschwingungszahlen ungedämpfter Systeme, nämlich einen Wert von ω^2 der größer, und einen, der kleiner ist als ω_{10}^2 und ω_{20}^2 .¹⁾ Aus Gleichung (II) können wir dann λ berechnen:

$$(16) \quad 2\lambda = - \frac{k_1/m_1 (\omega_{20}^2 - \omega^2) + k_2/m_2 (\omega_{10}^2 - \omega^2) - \frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1 \omega} (\omega_{20}^2 - \omega^2)}{(\omega_{10}^2 - \omega^2) + (\omega_{20}^2 - \omega^2) + k_1/m_1 k_2/m_2}.$$

Das letzte Glied im Nenner können wir bei dieser Diskussion vernachlässigen. Dividieren wir durch $\omega_{20}^2 - \omega^2$, so erhalten wir:

$$(17) \quad 2\lambda = + \frac{\frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1 \omega} - \left[\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} \right]}{1 + \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2}}.$$

Nach dem oben Gesagten haben $(\omega_{10}^2 - \omega^2)$ und $(\omega_{20}^2 - \omega^2)$ stets dasselbe Vorzeichen, der Nenner und die beiden ersten Glieder des Zählers sind also stets positiv. Damit sich für λ ein positiver Wert ergibt, muß also $\frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1 \omega}$ positiv sein und dem absoluten Werte nach

$$(18) \quad \frac{R}{A_1} \frac{1}{m_1 \omega} > \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2}.$$

Diese Bedingung wird um so besser erfüllt, je kleiner A_1 ist. Je mehr A_1 wächst, desto mehr nimmt das (positive) λ ab und für einen bestimmten Wert von A_1 geht das Ungleichheitszeichen von (18) in das Gleichheitszeichen über. Dieser Wert von A_1 ist der des stationären Zustandes, was

1) Wie die Kurven für $K^2 = 0$ in Fig. 3.

man durch Vergleich mit Gleichung (5) (II) bestätigt findet. Ist die Amplitude größer als die dem stationären Zustande entsprechende, so wird λ negativ; die stationäre Amplitude ist also in dem Sinne *stabil*, daß sie nach Vergrößerung bzw. Verkleinerung sich von selbst wieder herstellt.

Ob bei gegebener kleiner Anfangsamplitude die eine oder die andere Schwingung sich zum stationären Zustande aufschauelt, hängt offenbar davon ab, für welche der Schwingungen der obige Ausdruck den größeren Wert erreicht; diese wird schneller anwachsen und schließlich allein übrig bleiben.

Damit λ möglich groß wird, muß $|\omega^2 - \omega_{10}^2| < |\omega^2 - \omega_{20}^2|$ sein. Figg. 1—3 zeigen, daß für die schnellere Schwingung ($\omega^2 > \omega_{10}^2$ und ω_{20}^2) $|\omega^2 - \omega_{10}^2| < |\omega^2 - \omega_{20}^2|$ ist für alle Werte von ω_{20}^2 , welche zwischen $\omega_{20}^2 = 0$ und $\omega_{20}^2 = \omega_{10}^2$ liegen. In diesem Intervall ist für die langsamere Schwingung $|\omega^2 - \omega_{10}^2| > |\omega^2 - \omega_{20}^2|$; in diesem Intervall wird also stets die schnellere Schwingung entstehen. Sobald ω_{20}^2 den Wert ω_{10}^2 überschreitet, wird für die *schnellere* Schwingung $|\omega^2 - \omega_{10}^2| > |\omega^2 - \omega_{20}^2|$; umgekehrt für die *langsamere*; in diesem Intervall wird also stets die langsamere Schwingung entstehen.

Wir erhalten also folgende Regel für das *Entstehen* der Schwingungen: Ändert man die Abstimmung des II. Pendels, so entsteht für $0 < \omega_{20}^2 < \omega_{10}^2$ die schnellere Schwingung, für $\omega_{10}^2 < \omega_{20}^2 < \infty$ die langsamere. Dabei wird vorausgesetzt, daß vor jeder Änderung der Abstimmung die Pendel wieder zu Ruhe gekommen sind. Ändert man die Abstimmung, während Schwingungen mit stationärer Amplitude vorhanden sind, so kann man die schnellere Schwingung über den Resonanzpunkt hinauf, die langsamere unter den Resonanzpunkt hinab„ziehen“. Diese über oder unter den Resonanzpunkt gezogenen Schwingungen entstehen aber nicht von selber aus kleinen Amplituden.

Führt man die auf den letzten Seiten für die Anregung durch das erste Pendel ausgeführte Rechnung für Anregung durch das zweite Pendel durch, so erhält man statt der Gleichung (18)

$$(19) \quad \frac{R}{A_2} \frac{1}{m_1 m_2 \omega} \frac{1}{\omega_{20}^2 - \omega^2} > \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2}.$$

Das führt zu derselben Forderung wie sie oben bei der Frage, wann eine stationäre Schwingung bei dieser Anregung

unterhalten werden kann, nämlich daß für $\omega_{20}^2 \cong \omega^2$ auch $\frac{R}{A_2} \cong 0$ sein muß. Bei Anregung durch das zweite Pendel kann also die zweite Schwingung ohne Umschaltung der Anregungsspulen nicht nur nicht unterhalten werden, sondern kann auch nicht von selber entstehen.

11. Röhrensender mit Zwischenkreis.

8. Die Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen für diesen Fall lauten:

$$(20) \quad \begin{cases} L_1 i_L'' + R_1 i_L' + \frac{1}{C_1} i_L = -L_{12} i_2'' + \frac{1}{C_1} i_a \\ L_2 i_L'' + R_2 i_2' + \frac{1}{C_1} i_2 = -L_{12} i_L''; \end{cases}$$

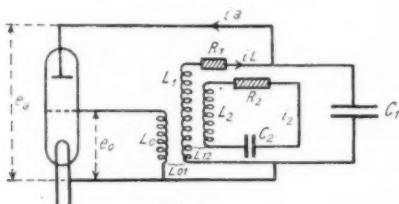


Fig. 5.

sie unterscheiden sich von den entsprechenden Gleichungen für die gekoppelten Pendel nur dadurch, daß hier statt der Kraftkoppelung Beschleunigungskoppelung auftritt. An Stelle der

auftretenden $f(t)$ haben wir i_a ; während aber $f(t)$ in seiner Amplitude dort als unabhängig von den schwingenden Systemen eingeführt wurde, ist jetzt die Größe i_a von i_L und i_2 abhängig. Es ist nämlich¹⁾

$$(21) \quad \begin{cases} i_a = S e_0 + \frac{1}{R_i} e_a, & e_0 = -L_{01} i_L'; & e_a = -L_1' i_L' - R_1 i_L, \\ \text{also } i_a = -\left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i}\right) i_L' - \frac{R_1}{R_i} i_L. \end{cases}$$

Die Elimination von i_2 aus den Gleichungen (20) liefert die Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$(22) \quad \begin{cases} \left[x^2 = \frac{L_2^2}{L_1 L_2}; \quad \omega_{10}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}; \quad \omega_{20}^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \right] \\ \left\{ \begin{aligned} i_L''' (1 - x^2) + i_L'' \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) + i_L' \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) \\ + i_L \left(\omega_{10}^2 \frac{R_2}{L_2} + \omega_{20}^2 \frac{R_1}{L_1} \right) + i_L \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 \\ = \omega_{10}^2 \left[i_a'' + \frac{R_2}{L_2} i_a' + \omega_{20}^2 i_a \right]. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Tel. 14. S. 27. 1919; Vallauri, Jahrb. d. drahtl. Tel. 12. S. 349. 1917.

9. Lösung für den stationären Zustand; Rückkoppelung vom Primärkreise aus. Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung (4), die für den Fall der gekoppelten Pendel abgeleitet war. Wenn wir aber jetzt statt i_a den Wert der Gleichung (21) einführen, so erhalten wir auf der rechten Seite statt der Differentialquotienten von i_a Differentialquotienten von i_L ; diese könnte man mit den entsprechenden Gliedern der linken Seite zusammenfassen und erhielte dann eine Differentialgleichung ohne 2. Glied, deren Lösung also scheinbar eine Schwingung von beliebiger, unbestimmter Amplitude wäre.¹⁾ Daß die Amplitude aber wenigstens für den stationären Fall der ungedämpften Schwingung mit konstanter Amplitude nicht unbestimmt ist, erkennt man leicht, wenn man den Ansatz $i_L = A_1 e^{i\omega t}$ macht. Dann zerfällt durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Gleichung (22) in 2 getrennte Gleichungen:

$$(23) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \omega^4 (1 - \kappa^2) - \omega^2 \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 \\ & = \omega_{10}^2 \left[(\omega^2 - \omega_{20}^2) \frac{R_1}{R_i} + \frac{R_2}{L_2} \omega^2 \left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i} \right) \right] \\ \text{(II)} & \frac{R_1}{L_1} (\omega_{20}^2 - \omega^2) + \frac{R_2}{L_2} (\omega_{10}^2 - \omega^2) \\ & = \omega_{10}^2 \left[(\omega^2 - \omega_{20}^2) \left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i} \right) - \frac{R_1 R_2}{R_i L_2} \right]. \end{cases}$$

Wären nun S und R_i konstante Größen, so wäre in diesen beiden Gleichungen allein ω^2 unbekannt und durch die beiden Gleichungen überbestimmt. Tatsächlich liegen die Verhältnisse aber so, daß S und R_i , soweit diese Größen für den Fall überhaupt noch (als Äquivalentwerte) definiert sind, von Gitterpotential e_o und Anodenpotential e_a abhängen, also auch von der Amplitude von i_L und von ω . Es kommen also in den Gleichungen (I) und (II) außer ω^2 noch S und R_i als Funktionen von Amplitude und Frequenz vor. Kennt man diese Funktionen, so reichen die beiden Gleichungen (I) und (II) gerade wieder wie früher aus, die beiden Größen ω^2 und A_1 zu bestimmen, womit wieder alles erledigt wäre. Kennt man S und R_i als Funktionen von A_1 und ω^2 nicht, so würden die beiden Gleichungen nicht zur Bestimmung der 3 Größen ω^2 , S , R_i , ausreichen; man müßte noch eine weitere Gleichung

1) K. Heegner, Diss. Jena 1920. S. 4.

hinzunehmen. Es läge nahe, als solche die Beziehung¹⁾ $S R_i D = 1$ zu verwenden, wenn es sicher wäre, daß der Durchgriff D unter den hier betrachteten Verhältnissen eine durch die geometrischen Verhältnisse der Röhre bestimmte Konstante wäre. Messungen darüber liegen meines Wissens nicht vor, und es ist sehr unwahrscheinlich, daß sie Konstanz von D ergeben würden. Unter diesen Umständen ist es am praktischsten, zunächst aus Gleichung (II) $S L_{01} + \frac{L_1}{R_i}$ zu berechnen und in (I) einzusetzen. So entsteht die Gleichung:

$$(24) \quad \left\{ \left[\omega_{10}^2 \left(1 + \frac{R_1}{R_i} \right) - \omega^2 \right] \left[(\omega_{20}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{R_2}{L_2} \right)^2 \omega^2 \right] - \kappa^2 \omega^4 (\omega_{20}^2 - \omega^2) = 0 \right.$$

Da man nun den Widerstand R_i im Zwischenkreis immer möglichst klein machen wird (Größenordnung 1 Ohm), R_i aber von der Größenordnung 10^3 bis 10^4 Ohm sein wird, so wird $\frac{R_1}{R_i} \omega_{10}^2$ gegen $\omega_{10}^2 - \omega^2$ zu vernachlässigen sein; ev. könnte es berücksichtigt werden dadurch, daß man statt der Eigenfrequenz ω_{10}^2 eine etwas abgeänderte $\omega_{10}^2 \left(1 + \frac{R_1}{R_i} \right)$ einführt. In der so entstehenden Gleichung

$$(25) \quad (\omega_{10}^2 - \omega^2) \left[(\omega_{20}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{R_2}{L_2} \right)^2 \omega^2 \right] - \kappa^2 \omega^4 (\omega_{20}^2 - \omega^2) = 0$$

steckt außer dieser kleinen Korrektion wegen des R_i keinerlei Vernachlässigung bezüglich der Koppelung und der Dämpfung mehr, sie muß also für beliebig kleine und beliebig große κ^2 und $\left(\frac{R_2}{L_2} \right)^2$ gültig sein.

14. *Diskussion der Gleichung für die Koppelungsfrequenzen.* Zur Diskussion führen wir wieder wie beim Fall der gekoppelten Pendel die Abkürzungen

$$\frac{\omega^2}{\omega_{10}^2} = \Omega^2; \quad \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} = \Omega_{20}^2; \quad \frac{(R_2/L_2)^2}{\omega_{10}^2} = K^2$$

ein; lösen wir wieder statt nach ω^2 nach ω_{20}^2 auf, so erhalten wir die Gleichung:

$$(26) \quad \Omega_{20}^2 - \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \Omega^4}{1 - \Omega^2} \pm \sqrt{-K^2 \Omega^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \Omega^4}{1 - \Omega^2} \right)^2}.$$

1) H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtl. Tel. 14. S. 37. 1919.

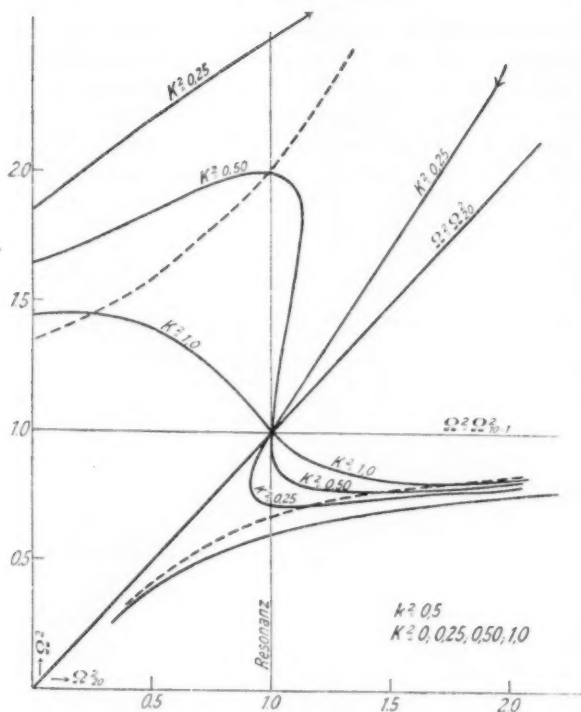


Fig. 7.

ersten Fall. Für i_a gelten aber nicht mehr die Gleichungen (21), sondern folgende:

$$(27) \quad \begin{cases} i_a = S e_0 + \frac{1}{R_i} e_a; & e_0 = -L_{02} i_2'; & e_a = -L_1 i_L' - R_1 i_L, \\ \text{also: } i_a = -S L_{02} i_2' - \frac{L_1}{R_i} i_L' - \frac{R_1}{R_i} i_L. \end{cases}$$

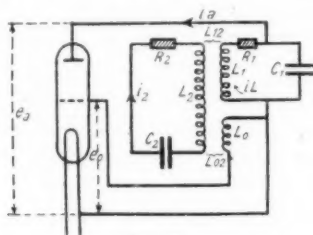


Fig. 8.

Eliminiert man i_L aus den Gleichungen (20) und (27), so erhält man:

$$(28) \quad \begin{cases} i_2''''(1-x^2) + i_2'''' \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) + i_2'' \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) \\ \quad + i_2' \left(\omega_{20}^2 \frac{R_1}{L_1} + \omega_{10}^2 \frac{R_2}{L_2} \right) + i_2 \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 = - \frac{L_{12}}{L_1 L_2 C_1} i_a'' \\ \text{und } i_a'' = -S L_{02} i_2'''' + \frac{L_1 L_2}{R_i L_{12}} i_2'''' + \frac{L_1}{R_i} \frac{R_2}{L_{12}} i_2'' \\ \quad + \frac{L_1}{R_i} \frac{1}{C_2 L_{12}} i_2' + \frac{R_1}{R_i} \frac{L_2}{L_{12}} i_2'' + \frac{R_1 R_2}{R_i L_{12}} i_2' + \frac{R_1}{R_i} \frac{1}{C_2 L_{12}} i_2. \end{cases}$$

Setzt man für i_2 eine rein periodische Funktion $i_2 = A_2 e^{i\omega t}$ an, so erhält man durch Vereinigung der Gleichungen (28) und Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$(29) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad \begin{cases} \omega^4(1-x^2) - \omega^2 \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 \\ \quad = \frac{L_1}{R_i} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) \omega^2 \omega_{10}^2 - \frac{R_1}{R_i} \omega_{10}^2 \omega_{20}^2, \end{cases} \\ \text{(II)} \quad \begin{cases} \frac{R_1}{L_1} (\omega_{20}^2 - \omega^2) + \frac{R_2}{L_2} (\omega_{10}^2 - \omega^2) \\ \quad = - \left(S \frac{L_{02} L_{12}}{L_2} + \frac{L_1}{R_i} \frac{\omega_{20}^2 - \omega^2}{\omega^2} \right) \omega^2 \omega_{10}^2 - \frac{R_1 R_2}{R_i L_2} \omega_{10}^2. \end{cases} \end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungen können die mit R_1/R_i multiplizierten Glieder vernachlässigt werden; grundsätzlich bestehen hier aber dieselben Schwierigkeiten, die bei den entsprechenden Gleichungen für die Rückkoppelung vom Primärkreise aus besprochen wurden. Es müßte, damit ω^2 , R_i , S berechnet werden könnten, noch eine Beziehung zwischen R_i und S hinzugenommen werden, oder R_i und S als Funktionen von i_2 bekannt sein. Praktisch wird die Lösung jedoch dadurch wesentlich einfacher, daß in der Gleichung (I) auch das mit L_1/R_i multiplizierte Glied im allgemeinen vernachlässigt werden kann, allenfalls durch eine geringe Vergrößerung, die allerdings von ω^2 abhängt, des Dämpfungsgliedes $\frac{R_1}{L_1} \frac{R_2}{L_2}$ berücksichtigt werden könnte. Dadurch kann aber der Charakter der Lösungen der Gleichung (I) gegenüber denjenigen, welche man erhält, wenn man die rechte Seite = 0 setzt, nicht geändert werden. Wir schreiben jetzt also statt der Gleichungen (29) mit guter Annäherung

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \omega^4 (1 - x^2) - \omega^2 \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 = 0, \\ \text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1}{L_1} (\omega_{20}^2 - \omega^2) + \frac{R_2}{L_2} (\omega_{10}^2 - \omega^2) \\ = - \left(S \frac{L_{01} L_{12}}{L_2} + \frac{L_1}{R_i} \frac{\omega_{20}^2 - \omega^2}{\omega^2} \right) \omega^2 \omega_{10}^2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dann ist aber die Schwingungszahl durch die Gleichung (I) allein schon gegeben und Gleichung (II) dient nur noch dazu, die Beziehung zwischen den Kreiskonstanten und den Röhrenkonstanten S und R_i aufzustellen, welche erfüllt sein muß, damit die nach (I) möglichen Schwingungen auch wirklich mit konstanter Amplitude erhalten bleiben können.

12. *Diskussion der Gleichung für die Koppelungsfrequenzen.* Die Gleichung (I) kann wieder wie die entsprechende der Gleichungen (11) direkt für ω^2 gelöst werden. Die daraus berechnete Abhängigkeit der Schwingungszahlen ω^2 von der Eigenfrequenz ω_{20}^2 des Sekundärkreises hat denselben Charakter wie bei den gekoppelten Pendeln. Vgl. dazu Fig. 3. Auch hier gibt es, wie in Ziffer 5, zwei nicht zusammenhängende Kurvenzweige, von denen der eine Schwingungszahlen, die größer, der andere solche, die kleiner sind als ω_{10}^2 und ω_{20}^2 umfaßt.

13. *Können die unter 10. und 12. diskutierten Schwingungen immer auftreten? Bedingungen dafür.* Die Beantwortung dieser Frage ist hier etwas schwieriger als bei den Pendelschwingungen. Wir knüpfen wieder wie bei diesen an die Gleichung (II) an. Diese lautet für den Fall der Gitterrückkoppelung vom Primärkreise aus [Gleichung (23) nach leichter Umformung]

$$(31) \quad \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = -\omega_{10}^2 \left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i} \right) - \frac{\omega_{10}^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} \frac{R_1}{R_i} \frac{R_2}{L_2}.$$

Hier kann wieder wegen der Kleinheit von R_1/R_i das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigt werden, so daß die zu diskutierende Gleichung die Form erhält

$$(32) \quad \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = -\omega_{10}^2 \left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i} \right).$$

Die Analogie mit Gleichung (12) liegt auf der Hand. Die linke Seite ist wieder stets positiv, damit es auch die rechte wird, muß $L_{01} < 0$ sein, d. h. die Gitterkoppelungsspule im richtigen Sinn gewickelt sein, und außerdem $|L_{01}| > \frac{L_1}{R_i S}$. Das allein

genügt aber noch nicht: Bei den gekoppelten Pendeln trat auf der rechten Seite der entsprechenden Gleichung (12) die Amplitude A_1 auf, die physikalisch irgendwelchen Einschränkungen nicht unterworfen ist, und die so gewählt werden konnte — sie stellt sich von selbst auf diesen Wert ein —, daß die rechte Seite für beliebige Werte von ω^2 gleich der linken wird. Hier tritt statt dessen als wesentlich die Steilheit der Charakteristik auf, die nicht unbeschränkt variierbar ist. Es muß also der Wert von S bzw. von $\left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i}\right)$, den die Gleichung (32) für ein bestimmtes ω^2 fordert, auch physikalisch möglich sein. Der größte Wert, den S annehmen kann, ist derjenige, welcher sich aus den üblichen Messungen der Gleichstromcharakteristik von Senderöhren ergibt. Kleinere Werte sind bei größeren Amplituden der Gitterspannung wohl möglich¹⁾, größere aber nicht. Der Röhrensender kann also nur schwingen, wenn der aus (32) berechnete Wert von $\left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i}\right)$ physikalisch möglich ist, was aus ausgedehnten Messungen von Charakteristiken festgestellt werden kann. Ist das für alle Punkte der Kurve Fig. 6 oder 7 der Fall, so erfolgen die Sprünge der Schwingungszahlen in ganz derselben Weise, wie bei den Pendeln beschrieben wurde; wenn nicht, so kann der Fall eintreten, daß die Schwingungszahlkurven nicht bis zu den Umkehrpunkten durchlaufen werden können, sondern die Sprünge schon früher eintreten, eventuell sind Schwingungen überhaupt nicht möglich, nämlich dann, wenn der kleinste Wert, den die linke Seite für irgendein mögliches ω^2 annehmen kann, schon größer ist, als der Wert, den die rechte Seite annimmt, wenn man dort die gewöhnlichen aus den üblichen Messungen ermittelten Werte von S und R_i einsetzt.

Für den Fall der Rückkoppelung vom Sekundärkreise aus haben wir die Gleichung (30 II) zu betrachten. Sie lautet nach einfacher Umformung

$$(33) \quad \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = -S \frac{L_{02} L_{12}}{L_2} \omega_{10}^2 \frac{\omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} - \frac{L_1}{R_i} \omega_{10}^2$$

1) Vgl. dazu F. Harms, *Jahrb. d. drahtl. Tel.* 15. S. 442. 1920.

Das zweite Glied der rechten Seite bringen wir auf die linke Seite hinüber, diese ist dann wieder stets positiv. Damit die rechte Seite positiv wird, muß also $-\frac{L_{02} L_{12}}{\omega_{20}^2 - \omega^2} > 0$ sein. Oder es muß sein für $\omega_{20}^2 \geq \omega^2$ das Produkt $L_{02} \cdot L_{12} \leq 0$. Das Vorzeichen des Produktes hängt aber nur ab von dem Wicklungssinn der Spulen, welche die induktive Koppelung zwischen Sekundärkreis und Gitterkreis (L_{02}) und zwischen Sekundärkreis und Primärkreis (L_{12}) herstellen. Ist der Wicklungssinn einmal gewählt, z. B. so daß $L_{02} \cdot L_{12} < 0$ ist, so sind nur die Schwingungen möglich, für welche $\omega_{20}^2 > \omega^2$ ist, also die langsameren Schwingungen. Diese allein können bei dieser Schaltung in konstanter Amplitude beständig sein. Will man die schnelleren Schwingungen haben, so muß man die Enden einer der beiden Koppelungsspulen (L_{02} oder L_{12}) vertauschen und dann sind bei dieser Schaltung nur diese schnelleren Schwingungen möglich. Diese Tatsache ist, wie bereits erwähnt, von H. Vogel und M. Wien¹⁾ experimentell gefunden worden; sie haben zwar nur den Wicklungssinn der Rückkoppelungsspule vertauscht, man kann aber natürlich ebensogut diese Veränderung an der Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis (L_{12}) vornehmen. Auch hier gilt bezüglich der Möglichkeit der Schwingungen überhaupt dasselbe, was oben bei der Rückkoppelung vom Primärkreis aus über die Röhrenkonstanten gesagt wurde.

14. *Bestimmung der Abreißstellen der Schwingungen aus den für kleine Amplituden durch Gleichstrommessungen ermittelten Röhrenkonstanten.* Wie bereits erwähnt (S. 47), brauchen die Stellen, an welchen beim Röhrensender die Schwingungen aussetzen, nicht mit den Umkehrstellen der Kurven in Fig. 6 und 7 zusammenfallen. Wir betrachten hier nur die Koppelung vom Primärkreis aus. Für diesen Fall muß die Gleichung (32 II) erfüllt sein.

$$(34) \quad \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} \equiv \left(S L_{01} + \frac{L_1}{R_i} \right) \omega_{10}^2.$$

Der größte Wert, den die rechte Seite annehmen kann, ist der, welchen man erhält, wenn man für S und R_i die nor-

1) H. Vogel u. M. Wien, Ann. d. Phys. 62. S. 663. 1920.

malen Werte einsetzt; wir wollen diesen größten Wert mit $\omega_{01}^2 \mathfrak{E}_{\max}$ bezeichnen. Die Schwingungen müssen aussetzen, wenn die linke Seite größer als dieser Maximalwert ist. In dem Beispiel $x^2 = 0,1$; $K^2 = 0,01$ der Fig. 6 ist nun z. B.

$$\text{für } \omega_{20}^2 = 0 \quad \frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2} = \frac{0,11}{1,11} = 0,1$$

$$\omega_{20}^2 = 1 \quad \frac{0,44}{0,44} = 1,0$$

$$\omega_{20}^2 = 1,5 \quad \frac{0,85}{0,35} = 2,3$$

und das Verhältnis $\frac{\omega_{10}^2 - \omega^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2}$ wächst, wenn man an der Kurve für Ω^2 entlang geht, weiter bis zu einem Maximum, welches auf dem rückläufigen Aste an der Resonanzstelle erreicht wird. Schwingungen sind nur möglich, so lange die linke Seite von (34) kleiner bleibt als $\omega_{10}^2 \mathfrak{E}_{\max}$; wird dieser Wert durch Veränderung von ω_{20}^2 und damit ω^2 erreicht, so werden die Amplituden im Primärkreise sehr klein (\mathfrak{E} ist ja der Wert von $S L_{01} + \frac{L_1}{R i}$ bei kleinen Amplituden im Primärkreise) und die Schwingungen brechen bei Überschreitung dieser Stelle ab. Die Amplitude im Sekundärkreise kann dabei noch beträchtlich sein.

Würzburg, im Juli 1921.

(Eingegangen 23. August 1921.)

3. *Über die Ionisation in der Geißlerentladung; von Erich Rumpf.*

Inhaltsübersicht: § 1. Einleitung, Ziele der Arbeit, Literatur. § 2. Untersuchungsmethode und Versuchsanordnung. § 3. Einige unmittelbare Versuchsergebnisse. § 4. Berechnung der Halbwertszeit. § 5. Überlegungen, betreffend Sättigung und Verteilung der Ionen über den Rohrquerschnitt. § 6. Berechnung der Ionendichte und Wiedervereinigungskonstante. § 7. Zusammenfassung.

§ 1. Um die Ionisationsvorgänge in der Geißlerentladung klarzulegen, schien es mir wünschenswert, Untersuchungen über das Abklingen der Ionisation nach dem Öffnen des Entladungsstromes anzustellen.

Es war zu erwarten, daß hierdurch besonders zwei Fragen beantwortet werden können: die Frage nach der Wiedervereinigungskonstante bei niederem Druck und die Frage nach der Ionendichte in der Geißlerentladung. Überdies hoffte ich noch, über die Ionendiffusion in der Geißlerentladung Aufschluß zu erhalten.

Die Wiedervereinigungskonstante bei verschiedenen Drucken ist nur in Arbeiten von McClung¹⁾ (95 mm Hg bis 3 Atmosphären) und P. Langevin²⁾ (152 mm Hg bis 5 Atmosphären) behandelt. McClung fand vollkommene Unabhängigkeit der Wiedervereinigungskonstante vom Druck, weil er bei seinen Untersuchungen den Ionenverlust durch Diffusion vernachlässigte. Langevin hingegen fand (unter Berücksichtigung der Diffusion) die Wiedervereinigungskonstante angenähert proportional dem Druck, wenigstens bei Drucken unter einer Atmosphäre, ein Ergebnis, das er nach rechnerischen Überlegungen erwartet hatte. Für geringere Drucke als 152 mm Hg liegen keine guten Beobachtungen der Wiedervereinigungskonstante vor.

1) McClung, Phil. Mag. (6) 3. S. 238. 1902.

2) P. Langevin, Ann. d. Chim. et de Phys. (7) 28. S. 433. 1903 und Compt. rend. 137. S. 177. 1903.

Für tiefere Drucke (bis herunter zu 75 mm Hg) hat Langevin¹⁾ nur Beobachtungen über die Ionenbeweglichkeiten k_1 und k_2 der positiven und negativen Ionen angestellt, die nach ihm mit der Wiedervereinigungskonstante durch die Formel

$$(1) \quad \alpha = 4 \pi e (k_1 + k_2) b$$

zusammenhängen, worin b den Bruchteil von Zusammenstößen bedeutet, der zu Wiedervereinigung führt. Er fand, daß die Ionenbeweglichkeit, die bei höheren Druckgebieten dem Druck umgekehrt proportional ist, bei niederen Druckgebieten diesem Verhalten nicht mehr entspricht, sondern stärker wächst als der Druck fällt. Weiter scheint nach Langevin gerade bei niederen Drucken b proportional dem Quadrat des Druckes zu sein (beobachtet allerdings nur bis 152 mm Hg). Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß bei niedrigen Drucken die Wiedervereinigungskonstante auch nicht mehr proportional dem Druck ist, sondern weniger stark fällt als der Druck. Dies gilt — wegen der unvergleichlich größeren Beweglichkeit — natürlich besonders dann, wenn es sich nicht mehr um Ionen allein, sondern, wie vermutlich in der Geißlerentladung, zum Teil auch um freie Elektronen handelt.

Für die Beobachtung der Wiedervereinigungskonstante in der Geißlerentladung ergeben sich wesentliche Schwierigkeiten. Die Langevinsche Differenzmethode läßt sich im Geißlerrohr wohl kaum anwenden; jede Methode aber, die Ähnlichkeit mit der von McClung hat, hat den Nachteil, daß die zeitlichen Ionenverluste durch Diffusion und Wiedervereinigung nicht getrennt beobachtet werden können. Durch Vernachlässigung der Diffusion wurde McClung zur Aussage verleitet, daß die Wiedervereinigungskonstante unabhängig ist vom Druck; denn die Diffusion steigt mit der Verdünnung des Gases ebenso stark, als die Wiedervereinigung abnimmt, wodurch der gesamte Ionenverlust bei geringen Ionendichten (Ionisation durch Röntgenstrahlen) vom Druck unabhängig wird.

Wenn die Wiedervereinigungskonstante bei niedrigen Drucken gemessen werden soll, so muß man die Versuchs-

1) P. Langevin, Ann. d. Chim. et de Phys. (7) 28. S. 298. 1903 und Compt. rend. 134. S. 646. 1902.

bedingungen so gestalten, daß der Ionenverlust durch Diffusion möglichst heruntergedrückt wird. Das gelingt im Geißlerrohr, wenn man an einer Stelle der Entladung mißt, die möglichst hohe Ionendichte aufweist (denn die Wiedervereinigung ist abhängig vom Quadrat der Ionendichte) und ein möglichst konstantes und geringes Ionengefälle hat (denn die Diffusion ist abhängig vom zweiten Differentialquotienten der Ionendichte nach der Gefällsrichtung). Beide Bedingungen scheinen im Geißlerrohr am besten im auslaufenden Teil des negativen Glimmlichtes erfüllt, dort, wo es in den Faradayschen Dunkelraum übergeht. Überdies müssen die beiden Geißlerelektroden weit voneinander entfernt sein im Vergleich zur freien Weglänge. Dann ist zu erwarten, daß auch durch eine Methode der Untersuchung des Abklingens der Geißlerentladung, die der McClungschen nachgebildet ist, die Wiedervereinigungskonstante sich nicht allzusehr durch die Diffusion gefälscht ergeben würde; mit anderen Worten, daß das Abklingen der Geißlerentladung hauptsächlich durch Ionenwiedervereinigung herbeigeführt wird.

Demnach soll das Abklingen der Geißlerentladung der Formel

$$(2) \quad \frac{d\varrho}{dt} = -\alpha \varrho^2$$

genügen, worin ϱ die zur Zeit t nach dem Öffnen des Entladungsstromes im Kubikzentimeter vorhandene Anzahl von Ionenpaaren bedeutet. Daraus ergeben sich die bekannten Formeln:

$$(3) \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \varrho_0 \alpha t} \quad \text{und} \quad (4) \quad T = \frac{1}{\varrho_0 \alpha},$$

worin ϱ_0 die Ionendichte zur Zeit $t = 0$ (Zeit des Öffnens) und T diejenige Zeit bedeutet, in der die anfängliche Ionendichte ϱ_0 auf die Hälfte gesunken ist. Bezeichnet man mit q die Zahl der im Kubikzentimeter sekundlich erzeugten Ionenpaare, so erhält man:

$$(5) \quad q = \alpha \cdot \varrho_0^2 = \varrho_0 / T;$$

aus Formel (3) ergibt sich weiter:

$$(6) \quad \alpha = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 \varrho_2 (t_2 - t_1)} \quad \text{und} \quad (7) \quad \varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2 (t_2 - t_1)}{\varrho_2 (t_2 - t_1) + (\varrho_1 - \varrho_2)(t - t_1)},$$

wenn man die zu den Zeiten t_1 bzw. t_2 vorhandenen Iondichten q_1 bzw. q_2 einführt. Endlich läßt sich noch berechnen:

$$(8) \quad T = \frac{q_2 t_2 - q_1 t_1}{q_1 - q_2}.$$

Über das Abklingen der Geißlerentladung finden sich in der Literatur wenige Andeutungen: G. C. Schmidt¹⁾ behauptet, noch 0,025 Sekunden nach dem Öffnen des Entladungsstromes eine beträchtliche Leitfähigkeit in seinem Geißlerrohr gefunden zu haben. Diesen Beobachtungen glaube ich aber wenig Wert beilegen zu sollen, denn ich vermute, daß ihm kapazitative Wirkungen seiner Leitungen ein so langsames Abklingen vorgetäuscht haben, worauf ich noch zurückkommen werde. Ich selbst²⁾ habe versucht, aus den von mir gemessenen, sekundlich erzeugten Ionenzahlen und einigen in der Literatur vorhandenen Andeutungen über die im Geißlerrohr im Gleichgewicht befindliche Ionendichte die Halbwertszeit der Geißlerentladung nach Formel (5) zu berechnen und bin dadurch zu $T = 0,4 - 3 \cdot 10^{-3}$ Sekunden, nach einer anderen Angabe zu $0,3 \cdot 10^{-3}$ Sekunden gekommen. Schließlich findet sich neuerdings in einer Arbeit von F. Skaupy³⁾ die Bemerkung, daß eine technische Neonröhre (1 Amp.) innerhalb einer Minute 400mal trägeheitslos gelöscht und gezündet werden kann, was Zeitunterschieden von 0,15 Sekunden entspricht, innerhalb derer sich der ganze Vorgang des Zündens und Erlöschens restlos abspielen soll; anscheinend optisch beobachtet.

§ 2. Die Untersuchungsmethode, die ich nunmehr anwendete, hatte, wie schon angedeutet, mit der von McClung eine gewisse Ähnlichkeit.

In ein Geißlerrohr tauchten ein Paar Querelektroden, an die nach variierbaren und meßbaren Zeiten nach der Unterbrechung der Entladungsleitung eine Batterie und ein ballistisches Galvanometer angeschaltet werden konnten. Der Zusammenhang zwischen diesen Zeiten und den im Galvanometer beobachteten Elektrizitätsmengen bildet den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung.

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 18. S. 869. 1905.

2) E. Rumpf, Ann. d. Phys. 53. S. 373. 1917 (später mit I bezeichnet).

3) F. Skaupy, Zeitschr. für techn. Phys. 1. S. 191. 1920.

Das benutzte Geißlerrohr habe ich gelegentlich einer anderen Arbeit¹⁾ beschrieben. An Stelle der drahtförmigen Sonden *S* kamen nun blechförmige Kupferelektroden von 0,6 mal 4,0 qcm Fläche in 0,53 cm Abstand zur Verwendung, auf kupfernen Zuleitungsdrähten angenietet, die durch die Glimmerscheibe *g* hindurchgingen. Die Kupferbleche durchquerten das ganze Geißlerrohr und standen so, daß ihre Flächen mit der Rohrachse parallel waren. Weil der Glashohlkonus k_1 leider schief an das Rohr angeblasen war, lagen sie etwas exzentrisch zur Rohrachse; die nähere war etwa 0,1 cm, die andere etwa 0,63 cm von ihr entfernt.

Die Zuleitungen *c* waren zu einem doppelpoligen Stromschlüssel *s* geführt, der die Verbindung zur variablen Batterie *V* von 60, in einigen Fällen von 110 Akkumulatoren und zum Galvanometer *G* herstellte. Er wird später durch die Fig. 1 noch näher beschrieben werden. Als Galvanometer benutzte ich anfänglich eines mit astatischem Nadelpaar mit objektiver Skalenablesung (1 cm etwa = $1 \cdot 10^{-8}$ Cb), später ein schon beschriebenes²⁾ Drehspuleninstrument, dessen zweite Systemspule durch etwa 10 Ohm geschlossen war; die Ablesung erfolgte durch Fernrohr, 1 cm entsprach $1,65 \cdot 10^{-8}$ Cb.

Diese ganze Nebenleitung war sorgfältig isoliert, größtenteils mit sauberem Paraffin; der Stromschlüssel *s* bestand aus Messing und Hartgummi, der von Zeit zu Zeit mit einer Schellack-Acetonlösung eingerieben wurde.

Die Hauptleitung des Geißlerrohres war in der Hauptsache unverändert geblieben (II, Fig. 1). Nur war zwischen der Batterie *B* und der Kathodenzuleitung *d* ein anderer, gleichfalls gut isolierender Stromschlüssel *ö* eingebaut; außerdem hat es sich als notwendig erwiesen, die Hauptleitung an der Anode *A* zu erden. Zwischen dem Milliampereometer *M* und der Anoden-erdung wurde noch ein Telephon eingeschaltet.

Die Methode der Untersuchung des Abklingens der Geißlerentladung bestand nun darin, daß der Stromschlüssel *ö* geöffnet und nach einer meßbaren Zeit der Stromschlüssel *s* geschlossen

1) E. Rumpf, Ann. d. Phys. 59. S. 5. 1919 (Fig. 1, später mit II bezeichnet).

2) E. Rumpf, Ann. d. Phys. 62. S. 173. 1920 (später mit III bezeichnet).

wurde. Je größer der Zeitabstand zwischen dem Öffnen und Schließen der beiden Stromschlüssel gewählt wurde, je mehr das Gas im Geißlerrohr im Augenblick des Anlegens der Batterie V an die Sonden entionisiert war, um so kleinere Elektrizitätsmengen konnten durch die Sonden geschickt werden, um so kleiner wurden die Ausschläge im ballistischen Galvanometer.

Diese verschwanden aber niemals ganz, wenn auch der Zeitabstand noch so groß gewählt wurde (viele Minuten, Betrieb der Stromschlüssel mit der Hand!), sondern behielten von Zeitabständen von Bruchteilen einer Sekunde an einen bestimmten konstanten Wert. Durch solche und andere eingehende Untersuchungen habe ich einwandfrei feststellen können, daß die diesen restlichen Galvanometerausschlägen entsprechenden Elektrizitätsmengen von Aufladungen der in der Nebenleitung unvermeidlichen Kapazitäten herrührten. Daher habe ich diese restlichen Galvanometerausschläge von den durch die abklingende Ionisation hervorgerufenen, die sich nach geringen Bruchteilen einer Sekunde zeigten, abgezogen. Vielleicht wurde G. C. Schmidt durch Nichtbeachtung dieser Aufladungen zu seiner Aussage verleitet, daß 0,025 Sekunden nach dem Öffnen des Entladungsstromes noch beträchtliche Leitfähigkeit im Geißlerrohr zu finden sei. Die strenge Proportionalität seiner Galvanometerausschläge mit den angelegten Spannungen könnte darauf hinweisen.

Das Öffnen und Schließen der beiden Stromschlüssel \ddot{o} und s besorgte ein schweres Fallgewicht, das in seiner Ruhelage magnetisch gehalten wurde, nach Unterbrechen des Magnetspulenstromes längs eines Drahtes herunterfiel, dann, nach ungefähr 1 m Fallhöhe die beiden Stromschlüssel betätigte und schließlich in einer Luftdämpfung aufgefangen wurde.

Zum Teil wurden die Versuche mit einem Fallapparat (nach Hiecke) aus dem physikalischen Institut der Universität Innsbruck ausgeführt. Ich benutze gerne die Gelegenheit, Herrn Prof. von Schweidler für die freundliche Überlassung dieses Apparates nochmals zu danken.

Der Stromschlüssel s war als Stromschließer ausgebildet. Nach vielen mühevollen Versuchen mit einpoligen Schaltern entschloß ich mich zu einem doppelpoligen von folgendem Bau,

der sich recht gut bewährte. Der Schalter bestand aus zwei miteinander und mit einem Hebelarm starr verbundenen Hartgummirollen q , von denen eine in Fig. 1 gezeichnet ist. Auf

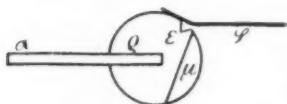


Fig. 1.

den Hartgummi war ein Messingstück μ aufgeschraubt und mit ihm zu einem flachen Zylinder von 17 mm Durchmesser auf der Drehbank abgedreht, so daß etwa ein Drittel des Umfanges aus Messing

bestand. Schraubchen im Messing klemmten das eine Paar von Zuleitungen (z. B. zu den beiden Sonden), bestehend aus leicht biegsamen Metallfäden. Das zweite Paar von Zuleitungen (zum Galvanometer und zur Batterie V) führte zu den kräftigen Messingfedern ϕ , die an einem Hartgummiklötzchen angeschraubt waren. Die Rollen waren um ihre Achse durch den Hebelarm α drehbar, der durch das Fallgewicht betätigt werden konnte. Stand der Hebelarm horizontal, so berührten die Messingfedern den Hartgummi, die Sonden waren also von Galvanometer und Batterie abgeschaltet. Wenn jedoch das fallende Gewicht den Hebelarm herunterschlug, so glitten die Messingfedern über die gezeichneten Einkerbungen ϵ im Hartgummi, die zur Verbesserung der Isolation dienten, hinweg und stellten durch die Messingkontakte die leitende Verbindung her: die Batterie war dann mit Sonden und Galvanometer verbunden, wodurch die nach dem Öffnen des Entladungsstromes zwischen den Sondenblechen noch vorhandenen Ionen an die Sonden getrieben wurden, was einen Ausschlag im Galvanometer hervorrief.

Der Stromschlüssel δ war als einpoliger Öffner ausgebaut: ein Messinghebelarm mit Platinblech, das durch Federkraft gegen einen Platinstift gedrückt wurde. Das fallende Gewicht schlug den Hebelarm herab, wodurch die Verbindung zwischen Platinblech und Stift gelöst wurde. Der Hebelarm mit dem angelöteten Platinblech war mit der Geißlerkathode verbunden, der Platinstift mit der Batterie B . Vermittels eines Schraubchens war es möglich, das Platinblech mit der Auftreffstelle des geerdeten Fallgewichtes am Hebelarm leitend zu verbinden, oder von dieser zu isolieren; im ersteren Falle wurde Vorsorge getroffen, daß das Fallgewicht den Hebelarm unmittelbar nach

dem Öffnen des Kontaktes gegen eine geerdete Feder drückte, so daß dann die Geißlerkathode im Augenblick des Öffnens des Entladungsstromes — durch das Fallgewicht und (unmittelbar nachher) durch die erwähnte Feder — geerdet war.

Während der Stromschlüssel s am Holzmast des Fallapparates fest angeschraubt war, ließ sich der andere Stromschlüssel \ddot{o} durch eine Mikrometerschraube verstellen. Ein Schraubengang betrug 0,73 mm, was bei der Fallhöhe von 100,7 cm einem Zeitunterschied von $1,60$ — $1,65 \cdot 10^{-4}$ Sekunden entsprach, wie außer durch die Rechnung auch durch Kondensatorentladungen experimentell festgestellt wurde, wobei der Schlüssel s durch einen zweiten Öffner ersetzt wurde. Da die Mikrometerschraube zwar eine in 100 Teile geteilte Trommel trug, aber einen merklichen toten Gang hatte, der die Einstellung erschwerte, so waren die kleinsten Zeitunterschiede, die mit Sicherheit eingestellt werden konnten, nur wenig kleiner als 10^{-5} Sekunden.

Einer besonderen Untersuchung, die von Fall zu Fall wiederholt wurde, bedurfte die Einstellung der beiden Stromschlüssel s und \ddot{o} auf Gleichzeitigkeit. Zu diesem Zwecke wurden einer Batterie von 8 Volt ein Kondensator von 0,1 Mf. und das Galvanometer parallel geschaltet; dabei war, wie in Fig. 2 zu ersehen, der Schlüssel \ddot{o} zwischen die Batterie und den Kondensator, der Schlüssel s zwischen den Kondensator und das Galvanometer gelegt. Unter verschiedenen Möglichkeiten hat sich diese Schaltung am besten bewährt: bei allen Stellungen der Mikrometerschraube, bei denen \ddot{o} früher geöffnet, bevor s geschlossen wurde, entlud sich nur die im Kondensator angesammelte Elektrizitätsmenge ($0,8 \cdot 10^{-6}$ Cb) durch das Galvanometer; dieses zeigte daher bei allen solchen Stellungen der Mikrometerschraube ein und denselben Ausschlag; wurde jedoch der Schlüssel s früher betätigt als \ddot{o} , so kam von den Elementen unmittelbar Strom in das Galvanometer, das daher einen um so größeren Ausschlag gab, je größer der Zeitunterschied zwischen dem Schließen und Öffnen von s und \ddot{o} war. Auf diese Weise konnte man aus den Galvanometerausschlägen

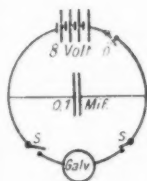


Fig. 2.

und den Schraubenstellungen eine Kurve zeichnen: mit einem mehr oder weniger scharfen Knick, der die Gleichzeitigkeit der Öffnung und Schließung der Stromschlüssel durch das Fallgewicht anzeigt.

Zur Betrachtung des Abklingens der Geißlerentladung mit der Zeit ist die Ermittlung der Ionenzahlen aus den beobachteten Elektrizitätsmengen nicht nötig; hierfür genügt es, die Galvanometerausschläge zu vergleichen, um ein Bild des Vorganges zu bekommen. Zunächst mögen daher Beobachtungen angeführt und soweit behandelt werden, als dies unter alleiniger Annahme der Proportionalität der gemessenen Elektrizitätsmengen mit den Ionendichten möglich ist.

§ 3. Wenn nach der beschriebenen Methode das Abklingen der Ionisation im Geißlerrohr untersucht wird, das heißt, wenn zu verschiedenen Zeiten nach dem Öffnen des Entladungstromes die Batterie-Galvanometerleitung an die Sonden angelegt wird und die auf diese Weise gewonnenen Elektrizitätsmengen als Ordinaten zu den zugehörigen Zeitabszissen zusammengezeichnet werden, so erhält man Kurven von der Art der Kurven 1 und 2 in Fig. 3. Diese beiden Beobachtungsreihen¹⁾ sind knapp hintereinander am selben Vormittag aufgenommen worden und unterscheiden sich dadurch, daß bei 1 die Geißlerkathode im Augenblick des Öffnens der Kathoden-zuleitung geerdet wurde, während bei 2 die beschriebene Erdungsvorrichtung abgeschaltet war, die Kathode also isoliert blieb. Jeder der eingezeichneten Beobachtungspunkte ist durch mehrere Fallversuche bestimmt (auf jede der Beobachtungsreihen kamen über 50 Fallversuche!); sie schließen sich recht gut zu Kurven zusammen, lassen sich aber nicht durch Formel (3) darstellen.

Im steil abfallenden Teil hat besonders die Kurve 2 vielmehr Ähnlichkeit mit einem logarithmischen Abfall. Das läßt

1) Bei diesen wie bei den beiden folgenden Beobachtungsreihen 3 und 4 befand sich der obere Rand der Sondenbleche 3,4 cm von der Geißlerkathode entfernt. Der Entladungsstrom war auf 2,0 Milliamp. gehalten, der Luftdruck im Geißlerrohr betrug rund 0,2 mm Hg, die angelegte Spannung V betrug etwas über 100 Volt, wie aus der der Fig. 2 beigegebenen Tabelle 1 zu ershen ist.

sich wohl ungezwungen dadurch erklären, daß die in der Kapazität der Kathodenleitung (zwischen Kathode und Stromschlüssel δ) angesammelte Elektrizitätsmenge die Kathode noch verhältnismäßig längere Zeit auf einem höheren Potential erhält, als der Zündspannung des Geißlerrohrs entspricht. Diese Elektrizitätsmenge entlädt sich durch das ionisierte Gas unter fortwährender Zündung; wird die Zündspannung unterschritten,

Tabelle I.

Beobachtungs- verhältnisse:	1. + 0,17 mm Hg	$V = 102$ Volt	geerdete	Kathode
Abstand Sonden- Kathode 3,4 cm	2. \times 0,17 bis 0,20	102	ungeerdete	
Entladungsstrom: 2,0 Milliamp.	3. \circ 0,19 bis 0,24	104	geerdete	
Abstand Kathode- Neg. Glimmlicht: 1,2 bis 1,5 cm	4. \ast 0,19 bis 0,20	111	geerdete	
	⊙ Berechnungspunkte für die ausgez. Kurve			

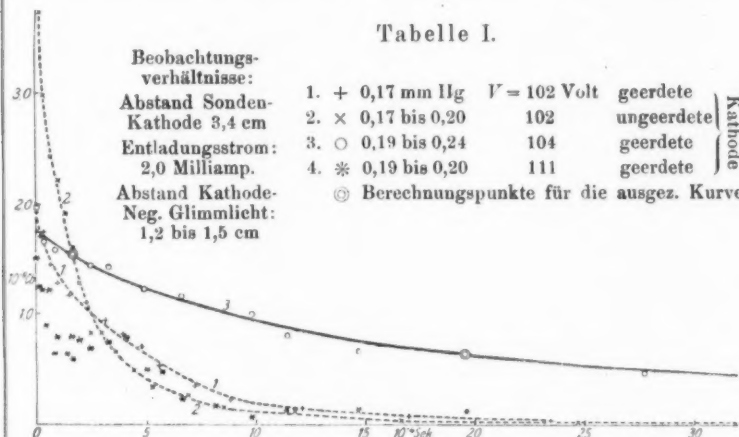


Fig. 3.

so treibt die noch vorhandene Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode die Ionen an diese Elektroden. Diese Vorgänge werden zum Teil vermieden, wenn die Kathode durch das Fallgewicht im Augenblick der Unterbrechung der Spannungszuleitung geerdet wird und mithin auch die Zündspannung sofort verschwindet. Daher liegen die Punkte + der Kurve 1 anfänglich unter der Kurve 2, später aber darüber; denn nunmehr werden die Ionen auch nicht mehr an die Anode und Kathode, die beide geerdet sind, getrieben, sondern verschwinden — bei vernachlässigter Diffusion — nur durch Wiedervereinigung.

Dies ist der Verlauf der Beobachtung mit Elektroden, die noch nicht lange benutzt wurden, nach einiger Zeit der Benutzung zeigen aber die Beobachtungspunkte keinen kurven-

mäßigen Verlauf mehr. Besonders gehen die gewonnenen Beobachtungspunkte dann wirr durcheinander, wenn man Aluminiumelektroden verwendet, die sich durch kurzes Stehen an der feuchten Zimmerluft (auseinandergenommenes Geißlerrohr) mit einer Oxydschicht bedeckt haben. Auf solche Weise sind die durch Sternchen gekennzeichneten Beobachtungswerte gewonnen, die sich nicht zu einer Kurve schließen, trotzdem auch hier Mittelwerte (aus allerdings voneinander recht sehr abweichenden) Einzelbeobachtungen genommen wurden. Es sieht fast aus, als ob hier ein schwingendes Abklingen der Entladung vorläge. Doch ist kaum anzunehmen, daß das Rohr mit seinem außerordentlich großen Widerstand einer Schwingung fähig ist. Es dürfte sich um zufällige Unregelmäßigkeiten handeln, mit denen die Elektrizität aus dem Innern der Elektroden-schichten hervordringt.

Mit sorgfältig blank polierten Elektroden, die vor der Zusammenstellung des Rohres sauber gereinigt wurden, konnte ich die Beobachtungspunkte aufnehmen, die durch die Ringelchen in der Zeichnung (Fig. 3) wiedergegeben sind, von denen jeder abermals durch mehrere Fallversuche ermittelt wurde, die aber nun untereinander recht gut übereinstimmen. Diese Punkte fügen sich mit nicht allzu großen Abweichungen an die ausgezogene Kurve 3, die aus der Formel (7) berechnet wurde unter Zugrundelegung der doppelt umringelten Beobachtungspunkte, mit der angeführten Voraussetzung, daß die gemessenen Elektrizitätsmengen E mit den Ionendichten ρ proportional sind. Wenn man also ganz reine Elektroden verwendet, so gelingt es, ein Abklingen der Geißlerentladung zu beobachten, das sich recht gut durch Wiedervereinigung allein erklären läßt; durch das gute Zusammenstimmen von Beobachtungspunkten und gerechneter Kurve erscheint demnach die Vernachlässigung der Diffusion gerechtfertigt. Es ist aber sehr schwer, eine solche Beobachtungsreihe durchzuführen. Bedenkt man, daß hierzu eine recht große Zahl von Fallversuchen (etwa 50) notwendig ist, daß während dieser ganzen Zeit Gas und Strom unverändert erhalten bleiben müssen, daß überdies die ganze komplizierte Nebenleitung tadellos isolieren muß und daß während der ganzen Beobachtungsreihe die Nullstellung der Stromschlüssel \ddot{o} und s sich nicht verschieben

darf, so wird es wohl verständlich, daß von vielen angestellten Versuchen eigentlich nur die beschriebene eine Beobachtungsreihe zur Gänze zu Ermittlung der Wiedervereinigungskonstante und zu anderen Berechnungen brauchbar wurde.

Ein bequemes Hilfsmittel zur Erkennung der Schichtenfreiheit der Elektroden bildet das Telephon. Es ist bei einwandfreien Elektroden vollkommen still; man hat dann eben eine stetige Entladung im Geißlerrohr vor sich. Bei älteren Elektroden läßt aber das Telephon Geräusche erkennen, die sich zu mehr oder weniger hohen und lauten Tönen ausbilden, wenn die Schichten dicker werden, wie etwa bei der Beobachtungsreihe 4., die durch Sternchen in der Fig. 3 wiedergegeben ist. Bei solchen Elektroden beobachtet man übrigens auch an der Kathode ein starkes Szintillieren.

Die der Kurve 3 entsprechenden (geringelten) Beobachtungspunkte sind nochmals in der Tabelle II zusammengeschrieben. Hier enthält die erste Senkrechte die Beobachtungszeiten, die zweite die dazugehörigen, ballistisch beobachteten Elektrizitätsmengen (Mittelwerte aus je zwei bis drei Fallversuchen); die beiden im Druck hervorgehobenen Wertepaare entsprechen den in Fig. 3 doppelt umringelten Punkten und wurden zur Berechnung der dritten Senkrechten (identisch mit Kurve 3) benutzt. Die vierte Senkrechte endlich enthält die Differenzen zwischen den beiden vorigen; man erkennt auch hier, daß die Unterschiede nicht sehr groß sind und sicher keinen „Gang“ zeigen, daß aber im allgemeinen die berechneten Werte etwas unter den beobachteten liegen; meistens nur um wenige Prozent, in einem einzigen Fall, der aus der Kurve beträchtlich herausfällt, um etwa 13 Proz.

§ 4. Keiner weiteren Annahme als der der Proportionalität der Ionendichten im Geißlerrohr mit den beobachteten Elektrizitätsmengen bedarf die Berechnung der Halbwertszeit T . Sie ergibt sich aus den beiden bisher benutzten (in Fig. 3 doppelt umringelten, in Tabelle II hervorgehobenen) Wertepaaren nach Formel (8) zu

$$T = 11,1 \cdot 10^{-4} \text{ Sekunden,}$$

eine Zahl, die mit meinen früheren Beobachtungen (S. 53) in gutem Einklang ist. Die Halbwertszeit des Abklingens der

Tabelle II.

<i>t</i>	<i>E</i> beob.	<i>E</i> ber.	Differenz
0,0	1,96	1,77	+ 0,19
0,163	1,65	1,75	- 0,10
0,815	1,58	1,65	- 0,07
1,625	1,51		
2,45	1,44	1,45	- 0,01
3,25	1,42	1,37	+ 0,05
4,89	1,22	1,23	- 0,01
6,51	1,14	1,11	+ 0,03
9,78	0,89	0,94	- 0,05
11,41	0,81	0,87	- 0,06
14,65	0,66	0,76	- 0,10
19,56	0,61		
27,7	0,48	0,51	- 0,03
37,5	0,38	0,41	- 0,03
10 ⁻⁴ Sek.	10 ⁻⁸ Cb	10 ⁻⁸ Cb	10 ⁻⁸ Cb

Geißlerentladung wird aber, wie aus den Kurven der Fig. 3 ersichtlich ist, bedeutend kleiner, wenn das Abklingen durch unreine Elektroden gestört wird, und wesentlich verändert, wenn die Geißlerelektroden im Augenblick der Stromöffnung nicht durch Erdung auf gleiches Potential gebracht werden.

§ 5. Wenn von den beobachteten Elektrizitätsmengen auf die Ionendichten, bzw. auf die Zahl der Ionenpaare zwischen den Sonden geschlossen werden soll, ergibt die verwendete Anordnung zunächst einen Vorteil: wie ich nämlich durch meine Untersuchungen über die Polarisierung in der Geißlerentladung (II und III) gezeigt habe, wird jede Messung von Querströmen durch die an den Sonden sich ausbildenden Schichten wesentlich gestört. Hier aber, wo nur einmalige kurze Stromstöße gemessen werden, können die an den Querelektroden unvermeidlichen Schichten nicht stören; die Galvanometerausschläge müssen unmittelbar einen Rückschluß erlauben auf die Ionenzahlen; die gemessene Elektrizitätsmenge, dividiert durch die Ladung eines Ions (wofür das Elementarquantum mit $1,56 \cdot 10^{-19}$ Cb angenommen wird), muß die Zahl der Ionen eines Vorzeichens ergeben, die durch das Feld an die Platten des durch die Sonden gebildeten Kondensators getrieben werden, und, wenn das Feld der angelegten Spannung genügend groß ist, um Wiedervereinigung nach dem Anlegen der Spannung zu verhindern, muß die so ermittelte Ionenzahl,

die Zahl der Ionenpaare ergeben, die überhaupt zum Zeitpunkt des Anlegens zwischen den Platten noch vorhanden war.

Weiter müssen aber noch zwei Berücksichtigungen in Rechnung gezogen werden: Die eine betrifft die Frage nach der bei der betreffenden Querspannung erreichten Sättigung, die andere betrifft die ungleichmäßige Verteilung der Iondichte im Rohrquerschnitt.

Um ein Bild über die erreichte Sättigung zu bekommen, wurde mit einer bestimmten Zeiteinstellung der Stromschlüssel das Verhalten der Galvanometerausschläge bei verschiedenen Spannungen V untersucht, wobei, wie erwähnt, die für jede Spannung „restlichen Galvanometerausschläge“, die von der Kapazität der Nebenleitung herrühren, abgezogen wurden. Der Versuch wurde mit verschiedenen Zeiteinstellungen wiederholt. Das beobachtete Verhalten läßt sich durch Kurven darstellen, von der Art, wie die in meiner Arbeit I durch die Fig. 1, 5 und 8 wiedergegebenen (wenn auch der Bereich C nicht erreicht wurde), zeigen also keine Sättigung. Nun habe ich dort eine Methode beschrieben, um aus solchen Kurven auf die Zahl der in der Sekunde erzeugten Ionenpaare schließen zu können. Die auf diese Weise ermittelten Ionenzahlen Q (dort n) genügten gut den bestehenden Anschauungen über die Vorgänge im Geißlerrohr, wenn man die gemessenen Querströme i durch eine Formel vom Bau:

$$(9) \quad e Q = \frac{i}{1 + f \cdot V}$$

zur Berechnung verwendete.

Zu dieser Formel wurde ich durch die Anschauung geführt, daß die Ionen der Geißlerentladung durch ihren Aufprall auf die Oberflächen der Querelektroden neue Ionen erzeugen, die den Sättigungsstrom um einen der Spannung proportionalen Anteil verstärken. Daß die Querströme mit der Entladung gleichzeitig verschwanden, suchte ich dadurch zu erklären, daß die Oberflächenionisation mit der Entladung gleichzeitig aufhörte. Leider kann ich diese Anschauung nicht aufrecht erhalten, denn sonst müßte sich bei Versuchen, wo erst nach dem Unterbrechen der Entladung die Spannung angelegt wird, bei genügend hoher Spannung Unabhängigkeit der Galvanometerausschläge von der Spannung ergeben (Sättigung). Das

Verhalten der dort beschriebenen Querströme und der nunmehr gemessenen Elektrizitätsmengen wird wohl in der Inhomogenität des Feldes zwischen den Kondensatorplatten seine Ursache haben. Ich möchte den Vorgang etwa folgendermaßen zu erklären versuchen:

Die Ionenpaare, die zum Transport der gemessenen Elektrizitätsmengen dienen, rühren nicht nur von dem durch die Sondenbleche prismatisch zweiflächig begrenzten Raum, sondern auch von einem Raumstück außerhalb der Sonden her, in das die Kraftlinien ausgreifen. Je mehr das Feld gesteigert wird, um so mehr Ionenpaare werden außerhalb der Sondenbleche der Wiedervereinigung entzogen, desto mehr Ionen beiderlei Vorzeichens werden durch die angelegte Potentialdifferenz an die Elektroden gebracht. Man kann etwa sagen, daß das Raumstück, in dem Sättigung herrscht, mit der angelegten Spannung wächst. In erster Annäherung kann man die Annahme machen, die in ihren Folgerungen durch den Versuch zu prüfen ist, daß die Zahl der Ionenpaare, die aus dem Raum außerhalb der Sonden zu den Sonden getrieben werden, proportional der an den Sonden wirkenden Potentialdifferenz und proportional der Ionendichte außen ist. Diese Ionendichte soll nun noch (in weiterer Annäherung) proportional der Ionendichte zwischen den Sonden sein. So kommt man dazu, die gesamte an die Sonden gelangende Elektrizitätsmenge E , die im Galvanometer gemessen wird, in zwei Teile zu zerlegen: In einen Summanden, der von den zwischen den Sonden vorhandenen Ionenpaaren N herrührt, für den die Sättigungsformel anzuwenden ist (bei genügend hohen Spannungen), und in einen Summanden, der von den Ionen außerhalb der Sonden herrührt, der mit N und der angelegten Spannung V proportional ist. Das heißt, man kommt zu der Formel

$$(10) \quad E = e N + f e N V \quad \text{oder} \quad N = \frac{E}{e(1 + f V)},$$

in der N die Zahl der Ionenpaare bedeutet, die in dem von den Sonden eingeschlossenen Prisma zur Zeit der Anlegung der Spannung V (Stromschlüssel s) nach dem Öffnen des Entladungsstromes (Stromschlüssel σ) vorhanden waren und f ein Proportionalitätsfaktor ist.

Demnach erhält man — für Querströme — wieder eine Formel, wie die obige (9), nur daß die Größe f eine andere Bedeutung hat. Es kann also die Formel (9) bzw. (10), die sich in ihren Ergebnissen (Arbeit I) gut bewährt hat, zur Berechnung von Q bzw. N verwendet werden, wenn man durch Messung mit zwei genügend hohen Spannungen die Größe f eliminiert, oder von Fall zu Fall hierdurch gesondert bestimmt.

Um aus der Anzahl der zwischen den Sonden vorhandenen Ionenpaare auf die Ionendichte zu schließen, und damit die Wiedervereinigungskonstante zu ermitteln, wird es noch nötig, die ungleichmäßige Verteilung der Ionendichte im Rohrquerschnitt in Berücksichtigung zu ziehen. Wie aus dem Aussehen der Geißlerentladung und aus mancherlei Messungen hervorgeht, ist die Ionendichte in der Rohrachse unvergleichlich höher als an den Rohrwänden. Zur Rechnung will ich der Verteilung der Ionendichte über den Rohrquerschnitt ein Paraboloid annähern, das in der Rohrachse seinen Scheitel hat; an den Rohrwänden sei die Ionendichte Null.

Bezeichne ich den Rohrradius mit R ($= 2,5$ cm nach II, S. 4) und betrachte einen Punkt im Abstände r von der Rohrachse, so ist dann dort die Ionendichte

$$\varrho = \varrho_a \frac{R^2 - r^2}{R^2},$$

wenn ϱ_a die Ionendichte in der Rohrachse bedeutet. Der Durchstoßpunkt der Rohrachse durch einen durch die Mitte der Sonden gelegten (horizontalen) Rohrquerschnitt werde nun zum Mittelpunkt eines in diesem Querschnitt liegenden, rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, in dem die Sondenbleche nach den Angaben von S. 5 die x -Achse an den Stellen $x_1 = 0,1$ cm und $x_2 = 0,63$ cm schneiden und sich von y_1 bis y_2 gleich $\pm 2,0$ cm erstrecken. Die zwischen den Sonden befindliche Anzahl von Ionenpaaren ist demnach (wenn $z = 0,6$ cm die Breite der Sondenbleche ist):

$$N = z \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \varrho \, dx \, dy;$$

das ergibt nach einmaliger Integration:

$$N = 2 \frac{\varrho_a}{R^2} \int_{x_1}^{x_2} \left[R^2 y_2 - x^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3} \right] dx$$

und nach der zweiten Integration:

$$N = \frac{2}{3} \frac{y_2^2}{R^2} \varrho_a [(3R^2 - y_2^2)(x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3)],$$

woraus man nach dem Einsetzen der Werte von x_1 , x_2 , y_2 und z erhält:

$$N = 0,98 \varrho_a.$$

Die Dichte in der Rohrachse ist also fast gleich der Anzahl der Ionenpaare zwischen den Sondenblechen, nämlich:

$$(11) \quad \varrho_a = 1,02 N.$$

Für spätere Zwecke wird es noch gut sein, außer der Dichte in der Rohrachse ϱ_a die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ im Rohrquerschnitt unter Annahme dieser parabelmäßigen Verteilung zu berechnen. Sie ist nach einem bekannten Satze (das Volumen eines Umdrehungsparaboloides ist gleich dem halben Volumen des umschriebenen Kreiszylinders) gleich der halben Dichte in der Rohrachse, also

$$(12) \quad \bar{\varrho} = \frac{1}{2} \varrho_a.$$

§ 6. Die zahlenmäßige Ermittlung der Ionendichte aus den beobachteten Elektrizitätsmengen ist nun durch die Formeln (10), (11) und (12) möglich.

Die Größe f wurde für die durch Kurve 3 und die Tabelle II wiedergegebene Beobachtungsreihe gesondert bestimmt und etwa zu $f = 0,117$ gefunden¹⁾; demnach ist in Formel (10), weil nach Tabelle I bei der genannten Beobachtungsreihe $V = 104$ Volt betrug, $1 + f \cdot V = 2,22$ zu setzen. Aus Tabelle II sind nun die Elektrizitätsmengen zu entnehmen und daraus mit Hilfe der Formeln (10), (11), (12) die Werte von N , ϱ_a und $\bar{\varrho}$ zu berechnen. Ich habe die Rechnung für drei Zeiten durchgeführt, nämlich für die nach Formel (7) extrapolierte Elektrizitätsmenge zur Zeit $t = 0$ und für die beobachteten (in Kurve 3

1) Man vergleiche damit die Angaben auf S. 394 meiner Arbeit I.

doppelt umringelten und in Tabelle II hervorgehobenen) Elektrizitätsmengen zu den Zeiten t_1 und t_2 , die schon zu den bisherigen Rechnungen verwendet wurden, und erhalte so ($e = 1,56 \cdot 10^{-19}$ Cb) die Zahlen der Tabelle III.

Tabelle III.

t	E	N	q_a	\bar{q}
0,0	1,77	5,1	5,2	2,6
1,625	1,54	4,5	4,6	2,3
19,56	0,64	1,85	1,88	0,94
10^{-4} Sek.	10^{-8} Cb	10^{10}	10^{10}	10^{10}

Bei den gewählten Beobachtungsverhältnissen (Tabelle I) herrschte also in meinem Geißlerrohr von 20 qcm Querschnitt während der Entladung in der Rohrachse eine Ionendichte von $5,2 \cdot 10^{10}$ Ionenpaaren/ccm. Da die Halbwertszeit, wie in § 4 berechnet wurde, $11,1 \cdot 10^{-4}$ Sekunden betrug, wurden dort nach Formel (5) während der Entladung sekundlich $q_a = 47 \cdot 10^{12}$ Ionenpaare im Kubikzentimeter erzeugt.

Diese Zahl läßt sich mit meinen früheren Messungen vergleichen, muß aber hierfür noch auf den bestleitenden Teil des negativen Glimmlichtes umgerechnet werden, der unter den angeführten Verhältnissen etwa 1,5 cm von der Kathode entfernt war. Nach H. A. Wilsons¹⁾, J. J. Thomsons²⁾ und meinen (I) Kurven ist die Ionisation im bestleitenden Glimmlicht mindestens doppelt so groß als im Übergang des Glimmlichtes zum Faradayschen Dunkelraum, der hier zur Messung verwendet wurde, und $47 \cdot 10^{12}$ Ionenpaare/ccm·sec ergab; es ist also für den bestleitenden Teil meines Geißlerrohres etwa die doppelte Ionisation anzunehmen, als gemessen, nämlich rund

$$q_{\max} = 100 \cdot 10^{12} \frac{\text{Ionenpaare}}{\text{ccm} \cdot \text{sec}}$$

Nun fand ich für ein anderes Geißlerrohr von 26 qcm Querschnitt (I, S. 375) unter ganz anderen Verhältnissen (0,1 mm Hg. 1,0 Milliamp. Entladungsstrom, zylindrischen Sonden) und

1) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) 49. S. 505. 1900.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 1. S. 361. 1901.

mit ganz anderen Beobachtungsmethoden im bestleitenden Glimmlicht seinerzeit $6 \cdot 10^{13}$ Ionen/sec-ccm (I, S. 403, dort mit n_0 bezeichnet). Ich konnte damals Unabhängigkeit vom Druck und Proportionalität mit der Entladungsstromstärke für die Ionisation feststellen; daher würde sich für dieses Rohr von 26 qcm Querschnitt bei 2,0 Milliamp. Entladungsstrom $12 \cdot 10^{13}$ Ionen/ccm·sec eines Vorzeichens ergeben. Daraus würde sich unter der Annahme, daß bei gleichem Entladungsstrom in Geißlerrohren verschiedener Querschnitte die Ionisation umgekehrt proportional den Querschnitten ist, für mein nunmehr benutztes Rohr von 20 qcm Querschnitt die Ionisation

$$q_{\max} = 12 \cdot 10^{13} \cdot \frac{26}{20} = 160 \cdot 10^{12} \frac{\text{Ionenpaare}}{\text{ccm} \cdot \text{sec}}$$

ergeben.

Die Übereinstimmung zwischen den beiden Zahlen (100 bzw. $160 \cdot 10^{12}$) ist in Anbetracht der schwierigen Messungen und der verschiedenen Versuchsbedingungen gut zu nennen, wenn auch nach den Ausführungen zu Beginn des § 5 die aus den jetzigen Beobachtungen ermittelte Ionisation ($100 \cdot 10^{12}$) höher hätte ausfallen sollen als die damals ermittelte ($160 \cdot 10^{12}$), wegen der bei allen derartigen Sondenmessungen an den Sonden auftretenden kapazitativen Schichten; denn die jetzige Anordnung umgeht ja die durch die Schichtwiderstände bedingten Fehler. Vielleicht zeigt die Übereinstimmung, daß bei hohen Spannungen und großflächigen Sonden die Wirkung der Schichtwiderstände nicht sehr stark ist. Durch diese Übereinstimmung werden aber auch die übrigen Zahlen gestützt, die sich aus den verwendeten Beobachtungen berechnen lassen.

Die Wiedervereinigungskonstante gibt Langevin für Luft von Atmosphärendruck mit $\alpha_{760}/e = 3200$ an ($e = 4,7 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh.), also $\alpha_{760} = 1,5 \cdot 10^{-6}$. Wäre sie tatsächlich proportional mit dem Druck, wie dies in manchen Druckbereichen zu sein scheint, so ergäbe sich für den von mir verwendeten Druck von rund 0,2 mm Hg: $\alpha = 4,0 \cdot 10^{-10}$. Nach den eingangs gemachten Bemerkungen ist sie aber höher zu erwarten.

Ihre Berechnung aus meinen Beobachtungsergebnissen begegnet insofern Schwierigkeiten, als die Wiedervereinigungskonstante infolge der ungleichmäßigen Verteilung der Ionendichte

über den Rohrquerschnitt (für die parabelmäßige Annäherung angenommen wurde) verschiedene Werte erhält, je nach dem Ort des Rohrquerschnittes, den man zur Berechnung herausgreift. Man wird wohl der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man eine mittlere Dichte zur Rechnung wählt, also die Werte $\bar{\rho}$ der Tabelle III benutzt, und erhält dann nach Formel (6) oder Formel (4), wenn man die in § 4 berechnete Halbwertszeit $T = 11,1 \cdot 10^{-4}$ sec einführt:

$$\bar{a}_{0,2} = 350 \cdot 10^{-10},$$

eine Zahl, die fast neunzigmal größer ist, als die nach Langevin extrapolierte. (Würde man die Dichten in der Rohrachse [ρ_a der Tabelle III] zur Ausrechnung heranziehen, so würde sich nur ein etwas über vierzigmal größerer Wert als nach Langevin ergeben.)

Es ist bemerkenswert, daß das Verhältnis k_e/k_2 der negativen Beweglichkeiten k_e in ganz reinen inaktiven Gasen (in denen sich freie Elektronen auch bei Atmosphärendruck halten können), und k_2 in denselben Gasen in schwach verunreinigtem Zustand (in denen sich sofort negative Ionen bilden) von genau derselben Größe ist, wie aus Tabelle IV¹⁾ hervorgeht. Dieses

Tabelle IV.

Negative Beweglichkeiten bei Atmosphärendruck.

	Rein	Schwach verunreinigt	Verhältnis
N ₂	120,4	1,84	65,4
Ar	206,3	1,70	122
He	500 ?	6,31	80
im Mittel etwa			90

Zusammentreffen ist nicht ganz zufällig, sondern folgt angenähert aus der Langevinschen Formel (1). Daraus ergibt sich erstens, daß meine Bestimmung der Wiedervereinigungskonstante der Größenordnung nach richtig ist; zweitens, daß die negativen Ladungsträger im Geißlerrohr (Luft!) freie Elek-

1) Die Zahlen sind entnommen einer Tabelle im Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Pfaundler-Müller-Pouillet. Vieweg, 1914. IV. S. 1122.

tronen sind; drittens, daß trotzdem die Abhängigkeit von b (des Bruchteiles von Zusammenstößen, der zur Wiedervereinigung führt) von dem Druck unverändert geblieben ist.

Wenn auch die aus den mittleren Dichten $\bar{\rho}$ gerechnete Wiedervereinigungskonstante 90mal größer ist, als die nach Langevin extrapolierte, so kann doch die von McCung beobachtete Unabhängigkeit der Wiedervereinigungskonstante vom Druck auch hier nicht gefunden werden, denn die sich hier ergebende Wiedervereinigungskonstante beim Druck von 0,2 mm Hg ist noch immer etwa 43mal kleiner als diejenige, die bei 760 mm Hg von Langevin u. a. beobachtet wurde.

Von Interesse ist vielleicht noch folgende Überlegung: Nimmt man in kleinem Druckbereich die Wiedervereinigungskonstante abermals proportional dem Druck an, so läßt sich folgern, weil nach meinen Beobachtungen (I) die Zahl der sekundlich erzeugten Ionenpaare im Geißlerrohr vom Druck unabhängig ist, daß die Ionendichte des Geißlerrohres mit dem reziproken Wert der Quadratwurzel aus dem Druck proportional ist. Leider fehlt mir die Möglichkeit, diese Untersuchungen augenblicklich fortzusetzen.

§ 7. *Zusammenfassung.* In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode beschrieben, um die Ionendichte, die Halbwertszeit des Abklingens und die Wiedervereinigungskonstante im Geißlerrohr zu untersuchen.

Das Verschwinden der Ionisation erfolgt im Geißlerrohr unter Umständen nur durch Ionenwiedervereinigung, ist aber vom Zustand der Elektroden des Geißlerrohres stark abhängig.

Die Wiedervereinigungskonstante wird in Luft von 0,2 mm Hg zu $3,5 \cdot 10^{-8}$ gefunden.

Graz, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 5. August 1921.)

4. *Über zwei Schwierigkeiten bei der Erklärung
der Photophorese als Radiometerwirkung;
von Satyendra Ray.*

Man hat die negative Photophorese als eine Radiometerwirkung erklärt. In der Erklärung wurden die Kügelchen als innerhalb des Lichtbündels ruhend angenommen, und das Problem wird als eines der stationären Wärmeleitung behandelt. Die Brownsche Bewegung der Rotation würde diese Erklärung ernstlich stören. Perrin bestimmte experimentell für die Rotationsbewegung der Kügelchen von einem Durchmesser von 13×10^{-4} cm in einer wässrigen Lösung einen Wert von $14^{\circ} \cdot 5$ pro Minute. Die Kügelchen in dem Photophoreseversuch schwebten in Gas und hatten einen Radius von 10^{-6} cm; d. h. sie waren mehr als 50mal kleiner. Infolge der Einsteinschen Formel

$$\frac{A^2}{t} = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{4\pi a^3 \eta}$$

ist die Rotation als Bewegung der *dritten* Potenz des Radius und der ersten Potenz der Viskosität der Flüssigkeit umgekehrt proportional, so daß die Brownsche Bewegung der Rotation in dem Photophoreseversuch $\sqrt[3]{125\,000 \times 60}$ mal stärker als in dem Perrinschen Versuch sein würde.

Auch der Durchmesser der Kügelchen ist von ungefähr derselben Größenordnung wie die mittlere freie Weglänge des umgebenden Gases. Um die „Temperatur“ von einem Volumenelement des Gases, sowie die von einem damit in Berührung befindlichen festen Körper zu definieren, müssen wir die lineare Dimension des Volumelements im Vergleich mit der mittleren freien Weglänge hinreichend groß annehmen. Dies bedeutet eine ernstliche Einschränkung der Anwendbarkeit von allen auf

der stationären Wärmeleitung begründeten Theorien auf die wirklichen Tatsachen. Das Kügelchen ist viel zu klein um anzunehmen, daß seine verschiedenen Teile verschiedene feste Temperaturen haben können, die in dem mit ihm in Berührung befindlichen Gas eine bestimmte Temperaturverteilung verursachen sollen.

London, University College.

(Eingegangen 1. Juli 1921.)

**5. Einfluß von Inhomogenität
auf die Messung der thermoelektrischen Effekte;
von G. Borelius.**

1. Einleitung.

Wenn bei thermoelektrischen Messungen die Enden des untersuchten Drahtes auf sehr verschiedene Temperaturen gebracht werden, kann wohl nie ganz vermieden werden, daß in dem Drahte Inhomogenitäten auftreten. Darauf aufmerksam geworden, daß aus dieser Ursache Werte der thermoelektrischen Größen erhalten werden können, die von den wirklichen Mittelwerten stark abweichen, habe ich im folgenden diese Abweichungen näher diskutiert. Ich setze auf Grund einer früheren Prüfung¹⁾ der Thomsonschen Theorie die Gültigkeit der daraus folgenden Beziehungen

$$(1) \quad e = \frac{II}{T}$$

und

$$(2) \quad T \frac{de}{dT} = \sigma_1 - \sigma_2$$

zwischen Thermokraft pro Grad e , Peltiereffekt II und Thomsoneffekte σ_1 und σ_2 in homogenen Metallen voraus und berechne die Fehler, die bei der Bestimmung dieser Größen zu erwarten sind.

Die Untersuchung gibt das praktisch wichtige Resultat, daß die allgemein benutzte, einfache Methode zur Bestimmung der Thermokraft e für genaue Messungen nicht geeignet ist, jedenfalls nicht, wenn eine so große Genauigkeit angestrebt wird, die nötig ist, um aus e gemäß (2) die Thomsonwärme gut berechnen zu können. Eine mehr geeignete Methode zur Messung der Thermokraft wird deshalb angegeben. Daß auch bei der direkten Bestimmung des Thomsoneffektes die

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 56. S. 388. 1918.

Inhomogenität eine sehr beschwerliche Fehlerquelle ausmacht, habe ich schon früher gezeigt¹⁾ und möchte in diesem Zusammenhang nochmals darauf aufmerksam machen.

2. Einfluß der Inhomogenität auf die Messung der Thermokraft nach der gewöhnlichen Methode.

Das gewöhnliche Schema für die Messung der Thermokraft ist in der Fig. 1 angegeben. Die eine Lötstelle wird bei konstanter Temperatur (oft in Eis) gehalten, die andere auf verschiedene Temperaturen gebracht. Die Thermokraft pro Grad wird aus den Variationen der an einem Mikrovoltmeter beobachteten thermoelektromotorischen Kraft E mit der Temperatur T berechnet ($e = \frac{\delta E}{\delta T}$).

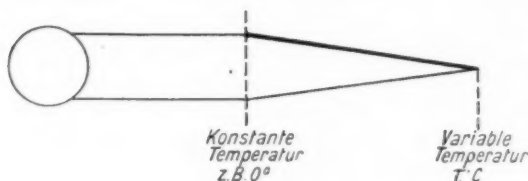


Fig. 1.

Sind die Drähte homogen, ist e ausschließlich Funktion von T und die aus dem Experiment erhaltene Größe ist die wirkliche Thermokraft.

Wir betrachten dann ein nicht homogenes Element. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß nur der eine Draht inhomogen ist, und daß für den zweiten σ und e bei allen Temperaturen gleich Null sind, so daß wir nur mit dem einen Drahte zu rechnen haben. Weiter nehmen wir an, daß das eine Ende des Drahtes bei 0° , das andere bei τ° C. gehalten wird. Die Lage eines Punktes an dem l cm langem Drahte geben wir durch seinen Abstand x von dem bei 0° gehaltenen Ende an. Die zu x gehörige Temperatur sei t .

Aus dem Experiment erhält man die scheinbare Thermokraft

$$(3) \quad e_s = \frac{\delta E}{\delta t},$$

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 63. S. 845. 1920.

wo E die thermoelektromotorische Kraft

$$(4) \quad E = \int_0^l e \frac{dt}{dx} dx$$

ist, worin e und $\frac{de}{dt}$ Funktionen von x und t sind. Es ist also

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} e_s &= \frac{1}{\delta \tau} \delta \int_0^l e \frac{dt}{dx} dx = \frac{1}{\delta \tau} \int \left[(e + \delta e) \left(\frac{dt}{dx} + \delta \frac{dt}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. - e \frac{dt}{dx} \right] dx \end{aligned} \right.$$

und wenn wir kleine Größen zweiter Ordnung versäumen

$$(6) \quad e_s = \frac{1}{\delta \tau} \int_0^l \left(\delta e \frac{dt}{dx} + e \delta \frac{dt}{dx} \right) dx.$$

Wir führen die Rechnungen für den oft vorkommenden Spezialfall weiter, daß das Temperaturgefälle im Drahte linear erfolgt. Dann ist

$$(7) \quad t = \frac{x}{l} \tau, \quad \delta t = \frac{x}{l} \delta \tau, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\tau}{l} \quad \text{und} \quad \delta \frac{dt}{dx} = \frac{\delta \tau}{l}$$

und weiter ist für einen bestimmten x -Wert

$$(8) \quad \delta e = \frac{\partial e}{\partial t} \delta t = \frac{\partial e}{\partial t} \frac{x}{l} \delta \tau.$$

In (6) eingesetzt gibt das

$$(9) \quad e_s = \frac{1}{l} \int_0^l \left(t \frac{\partial e}{\partial t} + e \right) dx.$$

Es interessiert uns nun besonders zu sehen, wie diese Größe von dem Mittelwert der Thermokraft des Drahtes bei der Temperatur τ

$$(10) \quad \bar{e} = \frac{1}{l} \int_0^l e_x dx$$

abweicht. Aus (9) und (10) finden wir diese Abweichung

$$(11) \quad \Delta e = e_s - \bar{e} = \frac{1}{l} \int_0^l \left(t \frac{\partial e}{\partial t} + e - e_x \right) dx.$$

Die Thermokraft e in einem Punkte x bei einer Temperatur t zerlegen wir weiter in zwei Teile e_0 und e' , wo e_0 die Thermo-

Inhomogenität eine sehr beschwerliche Fehlerquelle ausmacht, habe ich schon früher gezeigt¹⁾ und möchte in diesem Zusammenhange nochmals darauf aufmerksam machen.

2. Einfluß der Inhomogenität auf die Messung der Thermokraft nach der gewöhnlichen Methode.

Das gewöhnliche Schema für die Messung der Thermokraft ist in der Fig. 1 angegeben. Die eine Lötstelle wird bei konstanter Temperatur (oft in Eis) gehalten, die andere auf verschiedene Temperaturen gebracht. Die Thermokraft pro Grad wird aus den Variationen der an einem Mikrovoltmeter beobachteten thermoelektromotorischen Kraft E mit der Temperatur T berechnet ($e = \frac{\delta E}{\delta T}$).

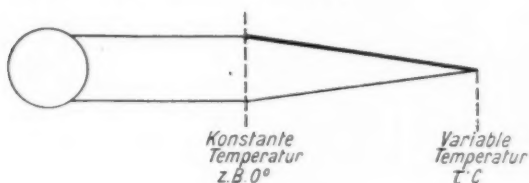


Fig. 1.

Sind die Drähte homogen, ist e ausschließlich Funktion von T und die aus dem Experiment erhaltene Größe ist die wirkliche Thermokraft.

Wir betrachten dann ein nicht homogenes Element. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß nur der eine Draht inhomogen ist, und daß für den zweiten σ und e bei allen Temperaturen gleich Null sind, so daß wir nur mit dem einen Drahte zu rechnen haben. Weiter nehmen wir an, daß das eine Ende des Drahtes bei 0° , das andere bei t° C. gehalten wird. Die Lage eines Punktes an dem l cm langem Drahte geben wir durch seinen Abstand x von dem bei 0° gehaltenen Ende an. Die zu x gehörige Temperatur sei t .

Aus dem Experiment erhält man die scheinbare Thermokraft

$$(3) \quad e_s = \frac{\delta E}{\delta t},$$

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 63. S. 845. 1920.

wo E die thermoelektromotorische Kraft

$$(4) \quad E = \int_0^l e \frac{dt}{dx} dx$$

ist, worin e und $\frac{de}{dt}$ Funktionen von x und t sind. Es ist also

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} e_s &= \frac{1}{\delta \tau} \delta \int_0^l e \frac{dt}{dx} dx = \frac{1}{\delta \tau} \int_0^l \left[(e + \delta e) \left(\frac{dt}{dx} + \delta \frac{dt}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. - e \frac{dt}{dx} \right] dx \end{aligned} \right.$$

und wenn wir kleine Größen zweiter Ordnung versäumen

$$(6) \quad e_s = \frac{1}{\delta \tau} \int_0^l \left(\delta e \frac{dt}{dx} + e \delta \frac{dt}{dx} \right) dx.$$

Wir führen die Rechnungen für den oft vorkommenden Spezialfall weiter, daß das Temperaturgefälle im Drahte linear erfolgt. Dann ist

$$(7) \quad t = \frac{x}{l} \tau, \quad \delta t = \frac{x}{l} \delta \tau, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\tau}{l} \quad \text{und} \quad \delta \frac{dt}{dx} = \frac{\delta \tau}{l}$$

und weiter ist für einen bestimmten x -Wert

$$(8) \quad \delta e = \frac{\partial e}{\partial t} \delta t = \frac{\partial e}{\partial t} \frac{x}{l} \delta \tau.$$

In (6) eingesetzt gibt das

$$(9) \quad e_s = \frac{1}{l} \int_0^l \left(t \frac{\partial e}{\partial t} + e \right) dx.$$

Es interessiert uns nun besonders zu sehen, wie diese Größe von dem Mittelwert der Thermokraft des Drahtes bei der Temperatur τ

$$(10) \quad \bar{e} = \frac{1}{l} \int_0^l e_x dx$$

abweicht. Aus (9) und (10) finden wir diese Abweichung

$$(11) \quad \Delta e = e_s - \bar{e} = \frac{1}{l} \int_0^l \left(t \frac{\partial e}{\partial t} + e - \bar{e} \right) dx.$$

Die Thermokraft e in einem Punkte x bei einer Temperatur t zerlegen wir weiter in zwei Teile e_0 und e' , wo e_0 die Thermo-

kraft im Punkte $x = 0$ bei derselben Temperatur t ist und e' also nur den Einfluß der Inhomogenität darstellt. e_0 ist ausschließlich Funktion von t und der dazu gehörende Teil des Integrals (11) verschwindet, wie man nach partieller Integration des ersten Termes bald findet. Es wird deshalb

$$(12) \quad \Delta e = \frac{1}{l} \int_0^l \left(t \frac{\partial e'}{\partial t} + e' - e'_t \right) dx.$$

Um diesen Ausdruck durchsichtiger zu bekommen, treiben wir die Spezialisierung weiter und setzen einfach

$$(13) \quad e' = \frac{x}{l} (p + q t + r t^2 + \dots),$$

wo $p, q, r \dots$ Konstanten sind, d. h. e variiert bei konstanter Temperatur linear mit x und kann in jedem Punkte durch eine abgebrochene Potenzreihe von t dargestellt werden. Dann wird, wie man nach einigen Rechnungen leicht findet,

$$(14) \quad \Delta e = \frac{q}{6} \tau + \frac{r}{4} \tau^2 + \dots$$

Das temperaturunabhängige Glied in $e' \left(\frac{x}{l} p \right)$ gibt also keinen Beitrag zu dieser Fehlergröße, wohl aber die übrigen.

Aus (14) sehen wir, daß der Fehler Δe keine eindeutige Funktion der thermoelektrischen Eigenschaften des Drahtes ist, sondern von den speziellen Versuchsbedingungen abhängt, denn r hängt von der Temperatur der konstant gehaltenen Lötstelle ab, die von uns ganz willkürlich zu 0°C. gesetzt wurde.

Demnächst wollen wir uns über die Größenordnung von Δe orientieren. Wir sehen von dem Glied mit r und die höheren ab. Aus (13) finden wir, daß $q = \frac{d e'}{d t}$ in dem Punkte $x = l$ ist, und aus der Gleichung (2) folgt deshalb

$$(15) \quad q = \frac{\sigma'}{T},$$

wenn σ' die Differenz der Thomsons effekte in den beiden Drahtenden bei $\tau^\circ \text{C.}$ ist und T die zu τ gehörende absolute Temperatur. Nun wissen wir noch recht wenig, wie die Thomsons effekte der Metalle im allgemeinen durch thermische und mechanische Behandlung beeinflußt werden. Daß die

Einwirkung unter Umständen ganz bedeutend werden kann, zeigt aber ein Beispiel aus einer bald in diesen Annalen erscheinenden experimentellen Arbeit, die ich zusammen mit Hrn. F. Gunneson ausgeführt habe. Wir fanden bei Zimmertemperatur ($T = 300$), daß die Thomsonwärme eines zuerst harten Zinkdrahtes nach Erwärmung auf 100°C . sich um nahe 3 Mikrovolt pro Grad geändert hatte. Im ungünstigsten Falle kann also q von der Größenordnung 0,01 Mikrovolt/Grad werden. Bei Messungen von tiefen oder hohen Temperaturen ist τ oft in der Praxis mehrere hundert Grad, und man sieht aus (14), daß Δe zu 0,1 Mikrovolt pro Grad oder mehr steigen kann. In der Nähe der Temperatur der konstant gehaltenen Lötstelle (bei uns willkürlich 0°) verschwindet dieser Fehler.

Die aus e_s bestimmte scheinbare Temperaturderivate der Thermokraft $\frac{de_s}{dT}$ bekommt, wie man aus dem Obigen leicht einsieht, einen Fehler

$$(16) \quad \Delta \frac{de_s}{dT} = \frac{de_s}{dT} - \frac{d\bar{e}}{dT} = \frac{q}{6} + \frac{\tau}{2} + \dots$$

Man muß also auch in der Nähe von $\tau = 0$ einen von q herührenden Fehler erhalten. Nehmen wir wieder das Zink als Beispiel, so würden wir nach einer Erwärmung des einen Drahtendes auf 100° bei einer Bestimmung der Thermokraft bei Zimmertemperatur und einer Berechnung des Thomsons effektes gemäß (2) einen Fehler von der Größe $300 \cdot \frac{0,01}{6} = 0,5$ Mikrovolt pro Grad erwarten können. Das Beispiel zeigt also, daß die besprochene Fehlerquelle eine sehr gefährliche ist. Besonders dürfte sie bei hohen Temperaturen, wo einerseits T groß ist, andererseits Inhomogenitäten leicht auftreten, eine große Rolle bei der indirekten Bestimmung von Thomson effekten spielen können.

3. Eine geeignete Methode zur Bestimmung von e und de/dT .

Um der im vorigen Paragraphen besprochenen Fehlerquelle zu entgehen, kann man das in Fig. 2 angedeutete Verfahren benutzen. Die eine Lötstelle wird auf die verschiedenen Temperaturen (T), bei denen man die Thermokraft messen will, gebracht, und diese wird bei möglichst kleinen Temperatur-

unterschieden δT der Lötstellen gemessen. Um einfache Verhältnisse hervorzurufen, muß weiter das Temperaturgefälle linear sein, was bei kleinen Temperaturunterschieden immer leicht zu erzielen ist. Es ist dann:

$$(17) \quad \frac{dT}{dx} = \frac{\delta T}{l}.$$

Die kleine thermoelektromotorische Kraft wird

$$(18) \quad \delta E = \int_0^l e \frac{dT}{dx} dx = \frac{\delta T}{l} \int_0^l e dx$$

und die observierte Thermokraft pro Grad

$$(19) \quad e_s = \frac{\delta E}{\delta T} = \frac{1}{l} \int_0^l e dx = \bar{e}.$$

Dann ist auch wie gewünscht

$$(20) \quad \frac{de_s}{dT} = \frac{d\bar{e}}{dT}.$$

Hierzu kommt auch der wesentliche Vorteil, daß bei dieser Methode nie große Temperaturgefälle im Drahte hergestellt werden müssen, und deshalb nie bedeutende Inhomogenitäten zu befürchten sind.

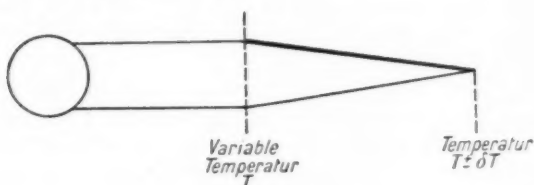


Fig. 2.

Ein zweites Verfahren, das ähnliche Vorteile bietet, ist die indirekte Bestimmung der Thermokraft aus der Peltierwärme gemäß der Gleichung (1). Bei der Messung der Peltierwärme brauchen nämlich keine wesentlichen Temperaturunterschiede im Drahte hergestellt zu werden, die Inhomogenitäten hervorrufen könnten, und wenn Inhomogenitäten doch vorhanden sind, erhält man mit der gewöhnlichen Methode jedenfalls einen Mittelwert des Peltiereffektes der beiden

Drahtenden. Indessen dürfte die Bestimmung der Peltierwärme experimentell beschwerlicher sein als die oben angegebene direkte Methode zur Bestimmung der Thermokraft.

4. Einfluß der Inhomogenität bei der Messung des Thomsons effektes.

Wir betrachten von dem inhomogenen Drahte ein kleines Stück dx , dessen Enden auf die absoluten Temperaturen T und $T + dT$ gehalten werden, und wir denken uns der Einfachheit halber diese Enden durch einen hypotetischen Draht mit Thomsons effekt und Thermokraft gleich Null verbunden. Die mittlere Thermokraft des Drahtstückes sei e , die Peltier effekte an den Kontaktstellen des kleinen Thermoelementes

II und $II + \frac{\partial II}{\partial T} dT + \frac{\partial II}{\partial x} dx$ und die von einem Strom S pro Sekunde in dem inhomogenen Drahtstück thermoelektrisch entwickelte Wärme $\sigma_s dTS$, so daß σ_s den scheinbaren Thomson effekt darstellt. Das Energieprinzip gibt dann für die Leistung in dem kleinen Thermoelemente

$$(21) \quad e dTS + \sigma_s dTS + II S - \left(II + \frac{\partial II}{\partial T} dT + \frac{\partial II}{\partial x} dx \right) S = 0,$$

woraus

$$(22) \quad \sigma_s = \frac{\partial II}{\partial T} - e + \frac{\partial II}{\partial x} \frac{dx}{dT}.$$

Wenn der Draht homogen gewesen wäre, würde

$$(23) \quad \sigma = \frac{\partial II}{\partial T} - e$$

gewesen sein, wo σ den wahren Thomsons effekt bezeichnet. Die Differenz zwischen dem scheinbaren, experimentell beobachtbaren Effekt σ_s und dem wahren ist also

$$(24) \quad \Delta \sigma = \sigma_s - \sigma = \frac{\partial II}{\partial x} \frac{dx}{dT}$$

oder auf Grund der Beziehung (1)

$$(25) \quad \Delta \sigma = T \frac{\partial e}{\partial x} \frac{dx}{dT}.$$

Um uns über die Größenordnung dieses Fehlers zu orientieren, nehmen wir als Beispiel einen hartgezogenen Silberdraht von der Länge l cm, der durch Erwärmung des einen Endes auf etwa 400° inhomogen geworden ist. Der Thermokraftunterschied der Drahtenden bei gewöhnlicher

Temperatur ist dann etwa 0,6 Mikrovolt pro Grad¹⁾, so daß im Mittel $\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{0,6}{l}$. Mißt man dann die Thomsonswärme mit den Drahtenden z. B. bei 0° und 100°, so daß $\frac{dx}{dT} = \frac{l}{100}$ ist, wird nach (25)

$$\Delta \sigma = 323 \cdot \frac{0,6}{l} \cdot \frac{l}{100} = 2 \text{ Mikrovolt/Grad.}$$

Je kleiner die Temperaturdifferenz der Enden des Drahtes bei der Messung des Thomsoneffektes ist, um so größer wird der Fehler. Fehler von dieser Größenordnung von mehreren Mikrovolt sind zwar recht selten zu erhalten, aber schon wenn man eine Genauigkeit auf Zehntelmikrovolt anstrebt, muß man wegen der behandelten Fehlerquelle sehr vorsichtig ans Werk gehen.

Da wir in § 2 und § 4 gesehen haben, daß die experimentelle Bestimmung beider Glieder in der Thomsonschen Gleichung (2) durch Inhomogenitäten stark verrückt werden können, wird es auch erklärlich, daß Forscher, die auf diese Fehlerquelle nicht geachtet haben, zu scheinbarem Widerspruch mit dieser Forderung der Theorie, für deren Gültigkeit sonst eine überwiegende Menge von Tatsachen sprechen, gekommen sind.

Lund, Juli 1921.

1) Vgl. G. Borelius, *Ann. d. Phys.* 60. S. 390. 1919.

(Eingegangen 2. August 1921.)

